Karlsruher Institut für Technologie

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

7. Mai 2012

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Geometrie der Schemata – Übungsblatt 3

Auf diesem Blatt bezeichne R immer einen kommutativen Ring mit Eins.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema und $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ ein affines Schema. Zeige, dass die Zuordnung

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Mor}(X, \operatorname{Spec} R) & \to & \operatorname{Hom}(R, \mathcal{O}_X(X))\,, \\ (\varphi, \varphi^\sharp) & \mapsto & \varphi^\sharp(\operatorname{Spec} R) \end{array}$$

bijektiv ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

a) Zeige, dass $(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}})$ ein terminales Objekt in der Kategorie der affinen Schemata ist, dass es also zu jedem affinen Schema $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ genau einen Morphismus $(\varphi, \varphi^\sharp)$ von lokal geringten Räumen nach $(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}})$ gibt.

b) Finde jeweils einen Ring R, so dass der Morphismus $(\varphi, \varphi^\sharp)$ aus a)
   - genau einen Punkt als Bild hat,
   - genau zwei Punkte als Bild hat,
   - unendlich viele Punkte als Bild hat, aber nicht surjektiv ist,
   - surjektiv ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zeige:

a) Ein Element $e \in R$ ist genau dann idempotent (d.h. es gilt $e^2 = e$), wenn $1 - e$ idempotent ist.

b) Gibt es in R zwei Elemente $e_1, e_2 \notin R^\times$, so dass $e_1 + e_2 = 1$ und $e_1 \cdot e_2$ nilpotent ist, so enthält R mindestens drei idempotente Elemente.
Hinweis: Betrachte das Ideal $I_n = (e_1^n, e_2^n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

c) $\operatorname{Spec} R$ ist genau dann zusammenhängend, wenn R höchstens zwei idempotente Elemente enthält.

d) Gib einen Ring R an, sodass $\operatorname{Spec} R$ nicht zusammenhängend ist.

Abgabe bis Dienstag, den 15. Mai 2012, zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.