Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

15. Mai 2012

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Geometrie der Schemata – Lösung zum Übungsblatt 3

Auf diesem Blatt bezeichne R immer einen kommutativen Ring mit Eins.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zeige:

a) Ein Element $e \in R$ ist genau dann idempotent (d.h. es gilt $e^2 = e$), wenn $1 - e$ idempotent ist.

b) Gibt es in R zwei Elemente $e_1, e_2 \notin R^\times$, so dass $e_1 + e_2 = 1$ und $e_1 \cdot e_2$ nilpotent ist, so enthält R mindestens drei idempotente Elemente.
Hinweis: Betrachte das Ideal $I_n = (e_1^n, e_2^n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

c) $\operatorname{Spec} R$ ist genau dann zusammenhängend, wenn R höchstens zwei idempotente Elemente enthält.

d) Gib einen Ring R an, sodass $\operatorname{Spec} R$ nicht zusammenhängend ist.

Lösung:

a) Sei $e^2 = e$ dann ist $(1-e)^2 = 1 - 2e + e^2 = 1 - e$. Mit $1 - (1 - e) = e$ folgt die andere Richtung.

b) Wir haben in der Übung schon folgendes gesehen: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha, \beta \in R$, so dass $\alpha e_1^k + \beta e_2^k = 1$, $(e_1 e_2)^k = 0$ und $x = \alpha e_1^k = 1 - \beta e_2^k$ idempotent ist. Es bleibt zu zeigen, dass x weder 1 noch 0 ist. Wäre $x = 0$, so wäre $\beta e_2^k = 1$, also $e_2 \in R^\times$, was im Widerspruch zur gegenteiligen Voraussetzung steht. Analog folgt aus $x = \alpha e_1^k = 1$, dass $e_1 \in R^\times$.

c) Sei zunächst $\operatorname{Spec} R$ zusammenhängend. Wir nehmen an, es gäbe drei verschiedenen idempotente Elemente, $0, 1$ und x. Nach a) ist dann auch $1 - x$ idempotent. Setze $V_1 = V(x)$ und $V_2 = V(1 - x)$. Die Mengen sind abgeschlossen (klar) und nichtleer: Wäre $V_1 = \emptyset$, so wäre x in keinem echten Ideal enthalten, also invertierbar und wegen $x^2 = x$ gleich 1. Genauso folgt aus $V_2 = \emptyset$, dass $1 - x \in R^\times$ und mit $(1 - x)^2 = (1 - x)$, dass $x = 0$.

Angenommen es gäbe ein $\mathfrak{p} \in V(x) \cap V(1 - x)$. Für dieses gälte x und $1 - x \in \mathfrak{p}$, also auch $1 \in \mathfrak{p}$, ein Widerspruch. Andererseits ist $V(x) \cup V(1-x) = V(x(1-x)) = V(0) = \operatorname{Spec}(R)$. Damit haben wir eine disjunkte Zerlegung von $\operatorname{Spec}(R)$ in abgeschlossene, nichtleere Teilmengen gefunden, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gibt es höchstens zwei idempotente Elemente in R.

Nun sei Spec(R) nicht zusammenhängend. Wir finden ein drittes idempotentes Element. Sei Spec(R) $= V_1 \cup V_2$ eine Zerlegung in abgeschlossene, disjunkte, nichtleere Teilmengen. Es ist $V_1 = V(I_1)$ und $V_2 = V(I_2)$, für Ideale $I_1, I_2 \subseteq R$. Da ihr Durchschnitt $V(I_1) \cap V(I_2) = V(I_1 + I_2) = \emptyset = V(1)$ ist, folgt $I_1 + I_2 = R$, und es gibt $e_1 \in I_1$, $e_2 \in I_2$ mit $e_1 + e_2 = 1$. Andererseits ist weder e_1 noch e_2 eine Einheit, denn beide Verschwindungsmengen sind nichtleer. Außerdem ist $V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cdot I_2) = \mathrm{Spec}(R) = V(\sqrt{0})$ gleich der Verschwindungsmenge des Nilradikals. Also folgt $I_1 \cdot I_2 \subseteq \sqrt{0}$ und damit ist $e_1 e_2$ nilpotent.

d) Es sei R ein beliebiger Ring mit 1 und $S = R \times R$ mit der komponentenweisen Verknüpfung. Dann ist $(1, 0)$ ein idempotentes Element in S, dass weder $(0, 0)$ noch $(1, 1)$ ist. Also ist Spec S nach c) nicht zusammenhängend.