Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

15. Mai 2012

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Geometrie der Schemata – Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien R, S Ringe, $X := \operatorname{Spec}(R)$, $Y := \operatorname{Spec}(S)$ sowie $\varphi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $g\colon Y \to X$ der von φ induzierte Schemamorphismus. Zeige:

a) Ein Element $f \in R$ ist genau dann nilpotent, wenn $D(f)$ leer ist.

b) Der Ringhomomorphismus φ ist genau dann injektiv, wenn der induzierte Morphismus $g^\sharp\colon \mathcal{O}_X \to g_*\mathcal{O}_Y$ injektiv ist. Ist das der Fall, so ist g dominant, d.h. $g(Y)$ ist dicht in X.

c) Ist φ surjektiv, so ist g ein Homöomorphismus von Y auf eine abgeschlossene Teilmenge von X und $g^\sharp\colon \mathcal{O}_X \to g_*\mathcal{O}_Y$ ist surjektiv.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Finde einen Ring R und eine Idealgarbe $\mathcal{I}$ auf $\operatorname{Spec}(R)$, die nicht quasikohärent ist (und beweise, dass du solche R und $\mathcal{I}$ gefunden hast).

Hinweis: Diskrete Bewertungsringe können helfen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweise die Proposition 4.5 aus der Vorlesung:

Eine Idealgarbe $\mathcal{I}$ auf einem Schema X ist genau dann quasikohärent, wenn es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in M}$ von X durch affine Schemata U_i gibt, so dass $\mathcal{I}|_{U_i}$ für jedes $i \in M$ quasikohärent ist.

Abgabe bis Dienstag, den 22. Mai 2012, zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.