Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

22. Mai 2012

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Geometrie der Schemata – Lösung zum Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien R, S Ringe, $X := \operatorname{Spec}(R)$, $Y := \operatorname{Spec}(S)$ sowie $\varphi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $g\colon Y \to X$ der von φ induzierte Schemamorphismus. Zeige:

a) Ein Element $f \in R$ ist genau dann nilpotent, wenn $D(f)$ leer ist.

b) Der Ringhomomorphismus φ ist genau dann injektiv, wenn der induzierte Morphismus $g^\sharp\colon \mathcal{O}_X \to g_*\mathcal{O}_Y$ injektiv ist. Ist das der Fall, so ist g dominant, d.h. $g(Y)$ ist dicht in X.

c) Ist φ surjektiv, so ist g ein Homöomorphismus von Y auf eine abgeschlossene Teilmenge von X und $g^\sharp\colon \mathcal{O}_X \to g_*\mathcal{O}_Y$ ist surjektiv.

Lösung:

c) Ist $\varphi\colon R \to S$ surjektiv, so ist $S \cong R/I$ mit $I = \operatorname{Kern}(\varphi)$. Bei der Lösung von Aufgabe 4 auf Übungsblatt 2 haben wir bereits eingesehen, dass $g = \operatorname{Spec}(\varphi)$ injektiv ist und dass $\operatorname{Bild}(g) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid I \subseteq \mathfrak{p}\} = V(I)$. Die Umkehrabbildung $g^{-1}\colon V(I) \to \operatorname{Spec}(S)$, $\mathfrak{p} \mapsto \varphi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} + I$ ist folglich wohldefiniert.

Es bleibt zu zeigen, dass g^{-1} stetig ist. Sei dazu $V(J) \subseteq \operatorname{Spec} S$ abgeschlossen. Dann ist

$$\begin{aligned}(g^{-1})^{-1}(V(J)) = g(V(J)) &= g(\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S \mid J \subseteq \mathfrak{q}\})\\ &= \{\mathfrak{p} \in V(I) \mid J \subseteq g^{-1}(\mathfrak{p}) = \varphi(\mathfrak{p})\}\\ &= \{p \in \operatorname{Spec} R \mid \varphi^{-1}(J) \subseteq \mathfrak{p}\} = V(\varphi^{-1}(J))\end{aligned}$$

abgeschlossen. Somit ist g ein Homöomorphismus auf $V(I)$.

Nun sollte noch gezeigt werden, dass $g^\sharp$ surjektiv ist, falls φ surjektiv ist. Nach Bemerkung 1.10 aus der Vorlesung sollten wir dazu zeigen, dass für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ die induzierte Abbildung $g^\sharp_\mathfrak{p}$ surjektiv ist.

Sei zunächst $\mathfrak{p} \notin V(I)$. Dann gibt es ein offenes $U \subseteq X$ mit $\mathfrak{p} \in U$ und $U \cap V(I) = \emptyset$. Dann ist $g_*\,\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_Y(g^{-1}(U)) = \mathcal{O}_Y(\emptyset) = \{0\}$ und somit auch $(g_*\,\mathcal{O}_Y)_\mathfrak{p} = \{0\}$. Folglich ist $g^\sharp_\mathfrak{p}\colon\ \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \to (g_*\,\mathcal{O}_Y)_\mathfrak{p}$ surjektiv.

Ist $\mathfrak{p} \in V(I)$, dann ist $(g_*\,\mathcal{O}_Y)_\mathfrak{p} = \varinjlim_{\mathfrak{p}\in U} \mathcal{O}_Y(g^{-1}(U)) \cong \varinjlim_{\mathfrak{q}\in V} \mathcal{O}_Y(V) = \mathcal{O}_{Y,\mathfrak{q}}$ mit $\mathfrak{q} = g^{-1}(\mathfrak{p})$. Der Isomorphismus zwischen den Halmen kommt daher, dass g ein Homöomorphismus auf $V(I)$ ist und $\mathfrak{p} \in V(I)$. Weiter gilt $\mathcal{O}_{Y,\mathfrak{q}} = S_\mathfrak{q} \cong (R/I)_{\mathfrak{p}+I} \cong R_\mathfrak{p}/IR_\mathfrak{p}$. Mit der Identifizierung $S \cong R/I$ wird $g^\sharp_\mathfrak{p}$ zur kanonischen Projektion $R_\mathfrak{p} \to R_\mathfrak{p}/IR_\mathfrak{p}$ und ist damit surjektiv.