

## Geometrie der Schemata – Übungsblatt 5

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei  $R$  ein kommutativer Ring mit 1. Bestimme die folgenden Faserprodukte:

a)  $\text{Spec } R[X] \times_{\text{Spec } R} \text{Spec } R[Y]$  für die Inklusionen  $R \rightarrow R[X]$  und  $R \rightarrow R[Y]$ .

b)  $\text{Spec } R[X] \times_{\text{Spec } R[Y]} \text{Spec } R$  für die Ringhomomorphismen

$$R[Y] \rightarrow R, \quad Y \mapsto 0 \quad \text{und} \quad R[Y] \rightarrow R[X], \quad Y \mapsto X^2.$$

c)  $\text{Spec } L \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } \bar{k}$ , wobei  $L/k$  eine endliche separable Körpererweiterung ist und  $\bar{k}$  der algebraische Abschluss von  $k$ .

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien  $S$  ein Schema und  $T$  ein  $S$ -Schema. Ergänze die Zuordnung  $X \mapsto X \times_S T$  zu einem kovarianten Funktor von der Kategorie der  $S$ -Schemata in die Kategorie der  $T$ -Schemata.

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$ . Wir betrachten die elliptische Kurve  $E = V(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)) \subset \mathbb{A}^2(k)$ . Außerdem sei  $f: E \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$  der von

$$k[X] \rightarrow k[X, Y]/(Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)) = k[E], \quad X \mapsto X$$

induzierte und  $g: E \rightarrow \mathbb{A}^1(k)$  der von  $k[Y] \rightarrow k[E], Y \mapsto Y$  induzierte Schemamorphismus.

a) Wir betrachten das Faserprodukt  $Y = E \times_{\mathbb{A}^1(k)} E$  mit

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow f \\ E & \xrightarrow{f} & \mathbb{A}^1(k) \end{array} .$$

Zeige, dass  $Y$  reduzibel und singularär ist.

b) Sei nun  $Y = E \times_{\mathbb{A}^1(k)} E$  mit

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow g \\ E & \xrightarrow{f} & \mathbb{A}^1(k) \end{array} .$$

Ist das Faserprodukt noch immer singularär?

*Hinweis: Durch den Funktor  $t$  aus Proposition 3.8 können affine Varietäten als Schemata aufgefasst werden. Damit ist ihr Faserprodukt definiert.*

**Abgabe** bis Dienstag, den 29. Mai 2012, zu Beginn der Übung oder bis 13 Uhr in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.