

Geometrie der Schemata – Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachte die Abbildung $X \times_S Y \rightarrow \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$ aus Bemerkung 6.2, die das Faserprodukt von zwei S -Schemata $f: X \rightarrow S$ und $g: Y \rightarrow S$ in das topologische Faserprodukt von X und Y über S abbildet.

Zeige, dass die Abbildung im Allgemeinen nicht injektiv ist.

Hinweis: Es gibt ein Beispiel, bei dem das topologische Faserprodukt $\{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$ einelementig ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien S ein Schema, $\xi: X \rightarrow S$ ein S -Schema und $Y \hookrightarrow S$ ein abgeschlossenes Unterschema von S . Zeige:

- Der topologische Raum $X \times_S Y$ ist homöomorph zu $\xi^{-1}(Y)$.
- Ist $X \rightarrow S$ ein abgeschlossenes Unterschema von S , so ist $X \times_S Y$ homöomorph zu $X \cap Y$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $Y = \text{Spec}(k[t])$.

- Seien weiter

$$X = \text{Spec}(k[x, y, t]/(ty - x^2))$$

und $f: X \rightarrow Y$ der Schemamorphismus, der von dem natürlichen k -Algebren-Homomorphismus $k[t] \rightarrow k[x, y, t]/(ty - x^2), t \mapsto t$ induziert wird.

Zeige: Für $a \in k \setminus \{0\}$ ist die Faser $X_{(t-a)}$ irreduzibel und reduziert, wohingegen die Faser $X_{(t)}$ zwar irreduzibel, aber nicht reduziert ist.

- Nun sei

$$Z = \text{Spec}(k[x, y, t]/(xy - t))$$

und $f: Z \rightarrow Y$ der Schemamorphismus, der von dem natürlichen Homomorphismus $k[t] \rightarrow k[x, y, t]/(xy - t), t \mapsto t$ induziert wird.

Zeige: Auch hier ist die allgemeine Faser $Z_{(t-a)}$ irreduzibel und reduziert, wohingegen $Z_{(t)}$ reduziert, aber nicht irreduzibel ist.

Abgabe bis Dienstag, den 5. Juni 2012, zu Beginn der Übung oder bis 13 Uhr in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.