Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

5. Juni 2012

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Geometrie der Schemata – Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Ein Schemamorphismus $f\colon X \to Y$ heißt *quasikompakt*, wenn es eine offene, affine Überdeckung $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ gibt, sodass jedes $f^{-1}(V_i)$ quasikompakt ist. Zeige:

a) Ein Schemamorphismus $f\colon X \to Y$ ist genau dann quasikompakt, wenn für jede offene, affine Teilmenge $V \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(V)$ quasikompakt ist.

b) Ein Schemamorphismus $f\colon X \to Y$ ist genau dann von endlichem Typ, wenn er lokal von endlichem Typ und quasikompakt ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Es sei k ein Körper und X die affine Gerade über k mit doppeltem Nullpunkt. X ist also das Schema, das entsteht, wenn wir $U = \operatorname{Spec} k[X]$ mit $V = \operatorname{Spec} k[Y]$ entlang $D(X)$ und $D(Y)$ vermöge des Isomorphismus $k[Y, Y^{-1}] \to k[X, X^{-1}]$, $Y \mapsto X$ verkleben.

Zeige, dass X nicht separiert über k ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Zeige, dass ein Schemamorphismus $f\colon X \to Y$ genau dann separiert ist, wenn das Bild von X unter der von f induzierten Diagonalabbildung $\Delta_f\colon X \to X \times_Y X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es seien S ein Schema und X, Y zwei S-Schemata. Weiter seien zwei Morphismen f und g von X nach Y gegeben, die auf einer offenen, dichten Teilmenge von X übereinstimmen. Zeige:

a) Ist X reduziert und Y separiert über S, so gilt $f = g$.

b) Die Aussage ist falsch, wenn X nicht reduziert ist oder wenn Y nicht separiert ist.

Abgabe bis Dienstag, den 12. Juni 2012, zu Beginn der Übung oder bis 13 Uhr in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.