Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

12. Juni 2012

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Geometrie der Schemata – Lösung zum Übungsblatt 7

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Es sei k ein Körper und X die affine Gerade über k mit doppeltem Nullpunkt. X ist also das Schema, das entsteht, wenn wir $U = \operatorname{Spec} k[x]$ mit $V = \operatorname{Spec} k[y]$ entlang $D(x)$ und $D(y)$ vermöge des Isomorphismus $k[y, y^{-1}] \to k[x, x^{-1}]$, $y \mapsto x$ verkleben.

Zeige, dass X nicht separiert über k ist.

Lösung: Wir wollen eine offene, affine Teilmenge $W \subseteq X \times_{\operatorname{Spec} k} X$ finden, so dass $W \cap \Delta(X)$ kein abgeschlossenes Unterschema von W ist. Damit das klappen kann, sollte W etwas mit $U \cap V$ zu tun haben. Es gilt: $U \cap V \cong D(x) \cong D(y) \cong \operatorname{Spec} k[t, t^{-1}]$, durch $k[x, x^{-1}] \to k[t, t^{-1}], x \mapsto t$ und $k[y, y^{-1}] \to k[t, t^{-1}], y \mapsto t$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dotted, "\Delta"] \arrow[ddl, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{id}"] & \\
 & X \times_k X \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X \arrow[dr] & & X \arrow[dl] \\
 & \operatorname{Spec} k &
\end{tikzcd}$$

Beh.: Es gilt $p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V) \cong U \times_{\operatorname{Spec} k} V \subseteq X \times_{\operatorname{Spec} k} X$.

Wir zeigen, dass $p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)$ die UAE von $U \times_{\operatorname{Spec} k} V$ erfüllt. Dazu seien ein Schema T mit $\operatorname{Spec} k$-Morphismen $\varphi_1 \colon T \to U$ und $\varphi_2 \colon T \to V$ vorgegeben mit $s \circ i_1 \circ \varphi_1 = s \circ i_2 \circ \varphi_2$.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dotted, "\theta"] \arrow[drrr, bend left, "\varphi_2"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi_1"'] & & & \\
 & p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V) \arrow[rr, "p_2"] \arrow[dd, "p_1"'] \arrow[dr, "\subset"'] & & V \arrow[d, "i_2"] \\
 & & X \times_{\operatorname{Spec} k} X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d, "s"] \\
 & U \arrow[r, "i_1"'] & X \arrow[r, "s"'] & \operatorname{Spec} k
\end{tikzcd}$$

Aus der UAE von $X \times_k X$, angewendet auf $i_1 \circ \varphi_1$ und $i_2 \circ \varphi_2$, erhalten wir $\theta \colon T \to X \times_{\operatorname{Spec} k} X$ das diese Morphismen faktorisiert. Daraus folgt, dass $p_1(\theta(T)) \subseteq U$ und $p_2(\theta(T)) \subseteq V$ gilt, wir also einen eindeutigen Morphismus $\theta \colon T \to p_1^{-1}(U_i) \cap p_2^{-1}(U_j)$ erhalten haben.

Wir erhalten $\Delta^{-1}(U \times_{\operatorname{Spec} k} V) = \Delta^{-1}(p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)) = U \cap V$, also einen Morphismus $\Delta|_{U \cap V} \colon U \cap V \to U \times_{\operatorname{Spec} k} V \cong \operatorname{Spec} k[x, y]$ von affinen Schemata mit zugehörigem Ringhomomorphismus

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccl} k[x, y] & \to & k[t, t^{-1}] \\ x & \mapsto & t \\ y & \mapsto & t \end{array} \right. .$$

Da φ nicht surjektiv ist, wird der Ringhomomorphismus nicht von einem Ideal in $k[x, y]$ induziert und $\Delta_* \mathcal{O}_X|_{U \times_{\operatorname{Spec} k} V}$ ist nicht quasikohärent. Also ist $U \times_{\operatorname{Spec} k} V$ das W, das wir finden wollten.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es seien S ein Schema und X, Y zwei S-Schemata. Weiter seien zwei Morphismen f und g von X nach Y gegeben, die auf einer offenen, dichten Teilmenge von X übereinstimmen. Zeige:

a) Ist X reduziert und Y separiert über S, so gilt $f = g$.

b) Die Aussage ist falsch, wenn X nicht reduziert ist oder wenn Y nicht separiert ist.

Lösung:

b) In der Übung hat noch ein Beispiel dafür gefehlt, dass die Aussage aus a) nicht gilt, falls X nicht reduziert ist.

Ist $X = \operatorname{Spec} k[x, y]/(xy, y^2)$, $Y = \operatorname{Spec} k[x, y]$ und seinen $\overline{x}$ und $\overline{y}$ die Restklassen von x und y in $k[x, y]/(xy, y^2)$. Dann sind

$$\varphi : k[x, y] \to k[x, y]/(xy, y^2)\,, \quad x \mapsto \overline{x}\,, \quad y \mapsto \overline{y}$$

und

$$\psi : k[x, y] \to k[x, y]/(xy, y^2)\,, \quad x \mapsto \overline{x}\,, \quad y \mapsto 0$$

zwei unterschiedliche Ringhomomorphismen, liefern also unterschiedliche Schemamorphismen

$$f : \operatorname{Spec} k[x, y]/(xy, y^2) \to \operatorname{Spec} k[x, y]$$

und

$$g : \operatorname{Spec} k[x, y]/(xy, y^2) \to \operatorname{Spec} k[x, y].$$

Diese sind beide abgeschlossene Einbettungen mit Bild jeweils $V(xy, y^2) = V(y) \subset \operatorname{Spec} k[x, y]$, also die "$x$-Achse" in der affinen Ebene. Weiter ist $D(x) \cap V(y)$ offen und dicht in $V(y)$, also auch $D(\overline{x}) = f^{-1}(D(x)) = g^{-1}(D(x)) \subset \operatorname{Spec} k[x, y]/(xy, y^2)$ offen und dicht. Wir behaupten dass f und g auf $D(\overline{x})$ übereinstimmen. Dazu reicht es, zu zeigen, dass die induzierten Morphismen

$$\varphi_x = \psi_x : k[x, y, x^{-1}] \to (k[x, y]/(xy, y^2))_{\overline{x}}$$

übereinstimmen. Aber in $(k[x, y]/(xy, y^2))_{\overline{x}}$ gilt $\overline{xy} = 0$ und $0 = \overline{x}^{-1}\overline{xy} = \overline{y}$, also stimmen φ_x und ψ_x auf x und y – und damit überall – überein.