

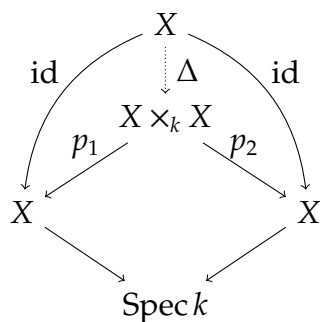
Geometrie der Schemata – Lösung zum Übungsblatt 7

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Es sei k ein Körper und X die affine Gerade über k mit doppeltem Nullpunkt. X ist also das Schema, das entsteht, wenn wir $U = \text{Spec } k[x]$ mit $V = \text{Spec } k[y]$ entlang $D(x)$ und $D(y)$ vermöge des Isomorphismus $k[y, y^{-1}] \rightarrow k[x, x^{-1}]$, $y \mapsto x$ verkleben.

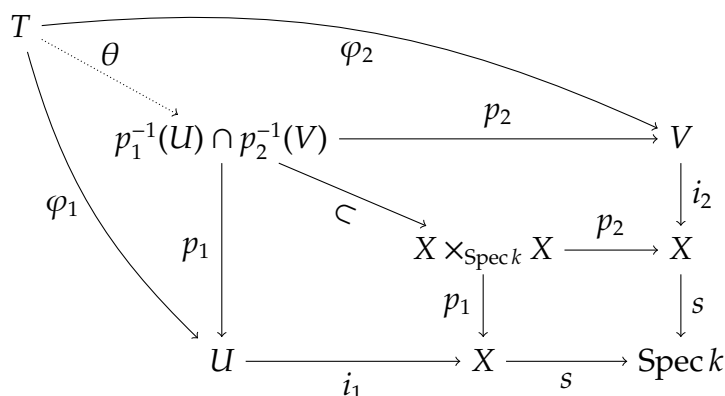
Zeige, dass X nicht separiert über k ist.

Lösung: Wir wollen eine offene, affine Teilmenge $W \subseteq X \times_{\text{Spec } k} X$ finden, so dass $W \cap \Delta(X)$ kein abgeschlossenes Unterschema von W ist. Damit das klappen kann, sollte W etwas mit $U \cap V$ zu tun haben. Es gilt: $U \cap V \cong D(x) \cong D(y) \cong \text{Spec } k[t, t^{-1}]$, durch $k[x, x^{-1}] \rightarrow k[t, t^{-1}]$, $x \mapsto t$ und $k[y, y^{-1}] \rightarrow k[t, t^{-1}]$, $y \mapsto t$.



Beh.: Es gilt $p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V) \cong U \times_{\text{Spec } k} V \subseteq X \times_{\text{Spec } k} X$.

Wir zeigen, dass $p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)$ die UAE von $U \times_{\text{Spec } k} V$ erfüllt. Dazu seien ein Schema T mit $\text{Spec } k$ -Morphismen $\varphi_1: T \rightarrow U$ und $\varphi_2: T \rightarrow V$ vorgegeben mit $s \circ i_1 \circ \varphi_1 = s \circ i_2 \circ \varphi_2$.



Aus der UAE von $X \times_k X$, angewendet auf $i_1 \circ \varphi_1$ und $i_2 \circ \varphi_2$, erhalten wir $\theta: T \rightarrow X \times_{\text{Spec } k} X$ das diese Morphismen faktorisiert. Daraus folgt, dass $p_1(\theta(T)) \subseteq U$ und $p_2(\theta(T)) \subseteq V$ gilt, wir also einen eindeutigen Morphismus $\theta: T \rightarrow p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)$ erhalten haben.

Wir erhalten $\Delta^{-1}(U \times_{\text{Spec } k} V) = \Delta^{-1}(p_1^{-1}(U) \cap p_2^{-1}(V)) = U \cap V$, also einen Morphismus $\Delta|_{U \cap V}: U \cap V \rightarrow U \times_{\text{Spec } k} V \cong \text{Spec } k[x, y]$ von affinen Schemata mit zugehörigem Ringhomomorphismus

$$\varphi: \begin{cases} k[x, y] & \rightarrow & k[t, t^{-1}] \\ x & \mapsto & t \\ y & \mapsto & t \end{cases} .$$

Da φ nicht surjektiv ist, wird der Ringhomomorphismus nicht von einem Ideal in $k[x, y]$ induziert und $\Delta_* \mathcal{O}_X|_{U \times_{\text{Spec } k} V}$ ist nicht quasikohärent. Also ist $U \times_{\text{Spec } k} V$ das W , das wir finden wollten.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien S ein Schema und X, Y zwei S -Schemata. Weiter seien zwei Morphismen f und g von X nach Y gegeben, die auf einer offenen, dichten Teilmenge von X übereinstimmen. Zeige:

- Ist X reduziert und Y separiert über S , so gilt $f = g$.
- Die Aussage ist falsch, wenn X nicht reduziert ist oder wenn Y nicht separiert ist.

Lösung:

- In der Übung hat noch ein Beispiel dafür gefehlt, dass die Aussage aus a) nicht gilt, falls X nicht reduziert ist.

Ist $X = \text{Spec } k[x, y]/(xy, y^2)$, $Y = \text{Spec } k[x, y]$ und seien \bar{x} und \bar{y} die Restklassen von x und y in $k[x, y]/(xy, y^2)$. Dann sind

$$\varphi : k[x, y] \rightarrow k[x, y]/(xy, y^2), \quad x \mapsto \bar{x}, \quad y \mapsto \bar{y}$$

und

$$\psi : k[x, y] \rightarrow k[x, y]/(xy, y^2), \quad x \mapsto \bar{x}, \quad y \mapsto 0$$

zwei unterschiedliche Ringhomomorphismen, liefern also unterschiedliche Schemamorphismen

$$f : \text{Spec } k[x, y]/(xy, y^2) \rightarrow \text{Spec } k[x, y]$$

und

$$g : \text{Spec } k[x, y]/(xy, y^2) \rightarrow \text{Spec } k[x, y].$$

Diese sind beide abgeschlossene Einbettungen mit Bild jeweils $V(xy, y^2) = V(y) \subset \text{Spec } k[x, y]$, also die “ x -Achse” in der affinen Ebene. Weiter ist $D(x) \cap V(y)$ offen und dicht in $V(y)$, also auch $D(\bar{x}) = f^{-1}(D(x)) = g^{-1}(D(x)) \subset \text{Spec } k[x, y]/(xy, y^2)$ offen und dicht. Wir behaupten dass f und g auf $D(\bar{x})$ übereinstimmen. Dazu reicht es, zu zeigen, dass die induzierten Morphismen

$$\varphi_x = \psi_x : k[x, y, x^{-1}] \rightarrow (k[x, y]/(xy, y^2))_{\bar{x}}$$

übereinstimmen. Aber in $(k[x, y]/(xy, y^2))_{\bar{x}}$ gilt $\bar{x}\bar{y} = 0$ und $0 = \bar{x}^{-1}\bar{x}\bar{y} = \bar{y}$, also stimmen φ_x und ψ_x auf x und y – und damit überall – überein.