Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

12. Juni 2012

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Geometrie der Schemata – Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeige, dass für Morphismen von noetherschen Schemata gilt:

a) Die Verkettung von separierten Morphismen ist separiert.

b) Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Schemamorphismen. Ist $g \circ f$ separiert, so auch f.

c) Die Eigenschaft, separiert zu sein, ist stabil unter Basiswechsel.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

a) Zeige: Ist $Y \subset \mathbb{P}^2(k)$ eine irreduzible Kurve und $y \in \mathbb{P}^2_k$ ihr generischer Punkt, so ist $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k,y}$ ein diskreter Bewertungsring.

b) Finde eine irreduzible quasiprojektive Fläche X über k und eine irreduzible Kurve $Y \subset X$ mit generischem Punkt $y \in t(X)$, so dass $\mathcal{O}_{t(X),y}$ kein diskreter Bewertungsring ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei X ein Schema von endlichem Typ über einem Körper k, d.h. $X \to \operatorname{Spec} k$ ist von endlichem Typ. Zeige:

a) Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn die Körpererweiterung $\kappa(x)/k$ endlich ist. Hierbei sei $\kappa(x)$ der Restklassenkörper im Punkt x.

b) Die abgeschlossenen Punkte von X sind dicht in X.

c) Wenn X nicht von endlichem Typ über einem Körper ist, dann stimmen a) und b) im Allgemeinen nicht.

Hinweis: Erinnere dich an die algebraische Version von Hilberts Nullstellensatz.

Abgabe bis Dienstag, den 19. Juni 2012, zu Beginn der Übung oder bis 13 Uhr in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.