

Geometrie der Schemata – Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Ein Schemamorphismus $f: X \rightarrow Y$ heißt **quasi-endlich**, wenn $f^{-1}(y)$ für alle $y \in Y$ eine endliche Menge ist.

Finde ein Beispiel für einen Schemamorphismus $f: X \rightarrow Y$, so dass

- f lokal von endlichem Typ, aber nicht von endlichem Typ ist.
- f von endlichem Typ, aber nicht endlich ist.
- f quasi-endlich, aber nicht endlich ist.
- f eigentlich, aber nicht endlich ist.
- f quasi-endlich, aber nicht lokal von endlichem Typ ist.
- f von endlichem Typ, aber nicht quasi-endlich ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ein Schemamorphismus $f: X \rightarrow Y$ heißt **projektiv**, wenn es für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ein kommu-

tatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}_Y^n \\
 & \searrow f & \swarrow \text{pr}_Y \\
 & & Y
 \end{array}$$

gibt, in dem i eine abgeschlossene Einbettung

ist. Dabei sei $\mathbb{P}_Y^n := \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} Y$.

Zeige:

- Ist $Y = \text{Spec}(R)$ affin, so ist $\mathbb{P}_Y^n \cong \mathbb{P}_R^n$.
- Die Komposition von projektiven Morphismen ist projektiv.
- Abgeschlossene Einbettungen sind projektiv.
- Projektiv zu sein ist stabil unter Basiswechsel.
- Projektive Morphismen noetherscher Schemata sind eigentlich.

Hinweis: Erwähne dich an die Segre-Einbettung von Blatt 7, Aufgabe 4, aus der Algebraischen Geometrie I.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei X eine nichtsinguläre, projektive Kurve über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k . Zeige:

- a) Für jedes $f \in k(X)^\times$ ist $\mathcal{L}(\operatorname{div}(f))$ isomorph zu \mathcal{O}_X .
- b) Für jeden Divisor D auf X gibt es eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und rationale Funktionen $f_i \in k(X)$, sodass $\mathcal{L}(D)(U_i) = \frac{1}{f_i} \mathcal{O}_X(U_i)$ für jedes $i \in I$ gilt.
- c) Für je zwei Divisoren D_1 und D_2 auf X ist $\mathcal{L}(D_1 + D_2)$ isomorph zu $\mathcal{L}(D_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}(D_2)$.

Abgabe bis Dienstag, den 26. Juni 2012, zu Beginn der Übung oder bis 13 Uhr in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.