Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

12. Juni 2012

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Geometrie der Schemata – Lösung zum Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Ein Schemamorphismus $f\colon X \to Y$ heißt **quasi-endlich**, wenn $f^{-1}(y)$ für alle $y \in Y$ eine endliche Menge ist.

Finde ein Beispiel für einen Schemamorphismus $f\colon X \to Y$, so dass

a) f lokal von endlichem Typ, aber nicht von endlichem Typ ist.

b) f von endlichem Typ, aber nicht endlich ist.

c) f quasi-endlich, aber nicht endlich ist.

d) f eigentlich, aber nicht endlich ist.

e) f quasi-endlich, aber nicht lokal von endlichem Typ ist.

f) f von endlichem Typ, aber nicht quasi-endlich ist.

Anmerkungen zur Lösung: Die Aufgabe haben wir in der Übung bereits gelöst. Da aber die Diskussion zu der Lösung zu einem falschen Ende gekommen ist, hier noch eine Anmerkung:

In der Definition von quasi-endlich ist mit $f^{-1}(y)$ die Faser (als Schema) über y gemeint. In meinen Gegenbeispielen für c), e), f) hatte ich immer $Y = \operatorname{Spec} k$, also Y einelementig, gewählt. Auf Übungsblatt 6 Aufgabe 2 haben wir aber schon eingesehen, dass $f^{-1}(Y)$, aufgefasst als topologischer Raum, homöomorph zum Urbild von Y unter f ist, wenn wir f als stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen X und Y auffassen. In meinen Gegenbeispielen gab es daher keinen Unterschied zwischen „topologisches Urbild nehmen“ und „Ausrechnen der Faser mit anschließendem Vergessen der Strukturgarbe“.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Ein Schemamorphismus $f\colon X \to Y$ heißt **projektiv**, wenn es für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{P}^n_Y \arrow[dl, "\mathrm{pr}_Y"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

gibt, in dem i eine abgeschlossene Einbettung ist. Dabei sei $\mathbb{P}^n_Y := \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})} Y$.

Zeige:

a) Ist $Y = \operatorname{Spec}(R)$ affin, so ist $\mathbb{P}^n_Y \cong \mathbb{P}^n_R$.

b) Die Komposition von projektiven Morphismen ist projektiv.

c) Abgeschlossene Einbettungen sind projektiv.

d) Projektiv zu sein ist stabil unter Basiswechsel.

e) Projektive Morphismen noetherscher Schemata sind eigentlich.

Hinweis: Erinnere dich an die Segre-Einbettung von Blatt 7, Aufgabe 4, aus der Algebraischen Geometrie I.

Lösung: In der Übung haben wir die Aufgabenteile a) und c) gezeigt, sowie die folgende Behauptung:

Behauptung 1: Abgeschlossene Einbettung zu sein ist stabil unter Basiswechsel.

b) Seien also $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ projektiv und m, n die natürlichen Zahlen, für die es eine abgeschlossene Einbettungen $i\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_Y$ bzw. $i'\colon Y \hookrightarrow \mathbb{P}^m_Z$ gibt, über die f bzw. g faktorisiert.

Betrachte das Faserprodukt von $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \mathbb{P}^m_Z$ und Y über $\mathbb{P}^m_Z$. Da für Schemata allgemein $A \times_B B = B$ und $(A \times_R B) \times_S C = A \times_R (B \times_S C)$ gilt, gilt auch $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \mathbb{P}^m_Z \times_{\mathbb{P}^m_Z} Y \cong \mathbb{P}^n_Y$. Somit ist das obere rechte Viereck im kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{P}^n_Y \arrow[r, hook, "\tilde{i}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_Y"] & \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \mathbb{P}^m_Z \arrow[d] \\
& Y \arrow[r, hook, "i'"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{P}^m_Z \arrow[d, "\mathrm{pr}_Z"] \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

ein Faserprodukt und nach Behauptung 1 ist damit $\tilde{i}$ eine abgeschlossene Einbettung.

Weiter erinnern wir uns an die Segre-Einbettung $\Psi\colon\ \mathbb{P}^n(k) \times \mathbb{P}^m(k) \to \mathbb{P}^N(k)$ mit $N = (n+1)(m+1) - 1$ von Übungsblatt 7 Aufgabe 3 aus der Algebraischen Geometrie I. Dort haben wir gelernt, dass das Bild abgeschlossen in $\mathbb{P}^N(k)$ ist, nämlich $V(J)$ für ein J, das wir konkret angegeben hatten. Nun kann man sich klar machen, dass die durch J gegebenen Gleichungen alle schon über $\mathbb{Z}$ definiert sind und die Konstruktion somit auch über $\mathbb{Z}$ klappt. Alternativ (da wir das Tensorprodukt dieses Semester nicht mehr scheuen) definieren wir in Analogie zu Ψ einen Schemamorphismus $\Psi'\colon\ \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{P}^N_{\mathbb{Z}}$ lokal auf $D_+(x_r) \times D_+(y_s)$ durch den surjektiven Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z}[\frac{z_{ij}}{z_{rs}} \mid (i,j) \in \{0,\dots,n\} \times \{0,\dots,m\}] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\frac{x_0}{x_r},\dots,\frac{x_n}{x_r}] \otimes \mathbb{Z}[\frac{y_0}{y_s},\dots,\frac{y_m}{y_s}] \\
\frac{z_{ij}}{z_{rs}} & \mapsto & \frac{x_i}{x_r} \otimes \frac{y_j}{y_s}
\end{array}.$$

Aus der lokalen Darstellung von Ψ' folgt sofort, dass Ψ' eine abgeschlossene Einbettung ist.

Basiswechsel mit dem Morphismus $\mathrm{pr}_{\mathbb{P}^N_{\mathbb{Z}}}$ liefert $j\colon\ \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{P}^m_{\mathbb{Z}} \times Z \ \to\ \mathbb{P}^N_Z$. Nach Behauptung 1 ist j wieder eine abgeschlossene Einbettung. Die Komposition von abgeschlossenen Einbettungen ist eine abgeschlossene Einbettung, also ist $j \circ \tilde{i} \circ i$ eine abgeschlossene Einbettung und das folgende kommutative Diagramm beweist, dass $g \circ f$ ein projektiver Morphismus ist.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{P}^n_Y \arrow[r, hook, "\tilde{i}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_Y"] & \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \mathbb{P}^m_Z \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d] & \mathbb{P}^N_Z \arrow[ddl, "\mathrm{pr}_Z"] \\
& Y \arrow[r, hook, "i'"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{P}^m_Z \arrow[d, "\mathrm{pr}_Z"'] & \\
& & Z &
\end{tikzcd}
$$

d) Sei $f\colon X \to Y$ projektiv und $g\colon Y' \to Y$ ein beliebiger Schemamorphismus (der Basiswechsel).

$$
\begin{tikzcd}
X \times_Y Y' \arrow[r, "\mathrm{pr}_X"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{P}^n_Y \arrow[dl, "\mathrm{pr}_Y"] \\
Y' \arrow[r, "g"'] & Y &
\end{tikzcd}
$$

Zu zeigen ist nun, dass auch f' projektiv ist.

Dazu machen wir uns klar, dass $\mathbb{P}^n_{Y'} = \mathbb{P}^n_Y \times_Y Y'$ und, dass $\mathbb{P}^n_{Y'} \times_{\mathbb{P}^n_Y} X = Y' \times_Y X$. Dann erhalten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
X \times_Y Y' \arrow[r, "\mathrm{pr}_X"] \arrow[d, "i'"'] & X \arrow[d, hook, "i"] \arrow[dd, bend left=60, "f"] \\
\mathbb{P}^n_{Y'} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{Y'}"'] & \mathbb{P}^n_Y \arrow[d, "\mathrm{pr}_Y"'] \\
Y' \arrow[r, "g"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

Der Morphismus i ist nach Voraussetzung eine abgeschlossene Einbettung, nach Behauptung 1 also auch i'. Die beiden inneren Vierecke sind Faserprodukte und somit auch das äußere Viereck. Daher gilt $\mathrm{pr}_{Y'} \circ i' = f'$ und f' ist ein projektiver Schemamorphismus.

e) Seinen X, Y noethersche Schemata und $f\colon X \to Y$ ein Schemamorphismus. Wir zeigen, dass $f = \mathrm{pr}_Y \circ i$ eigentlich ist.

Nach Proposition 8.10 ist $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ eigentlich. Alle beteiligten Schemata sind noethersch, also ist nach Folgerung 8.9. „eigentlich“ stabil unter Basiswechsel und pr_Y eigentlich.

Abgeschlossene Einbettungen sind nach Bemerkung 8.4 separiert und nach Bemerkung 7.7 endlich (also insbesondere von endlichem Typ). Nach Behauptung 1 ist eine abgeschlossene Einbettung auch universell abgeschlossen. Damit ist i eigentlich.

Die Komposition von eigentlichen Morphismen ist eigentlich und somit ist f eigentlich.