

Geometrie der Schemata – Lösung zum Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Ein Schemamorphismus $f: X \rightarrow Y$ heißt **quasi-endlich**, wenn $f^{-1}(y)$ für alle $y \in Y$ eine endliche Menge ist.

Finde ein Beispiel für einen Schemamorphismus $f: X \rightarrow Y$, so dass

- f lokal von endlichem Typ, aber nicht von endlichem Typ ist.
- f von endlichem Typ, aber nicht endlich ist.
- f quasi-endlich, aber nicht endlich ist.
- f eigentlich, aber nicht endlich ist.
- f quasi-endlich, aber nicht lokal von endlichem Typ ist.
- f von endlichem Typ, aber nicht quasi-endlich ist.

Anmerkungen zur Lösung: Die Aufgabe haben wir in der Übung bereits gelöst. Da aber die Diskussion zu der Lösung zu einem falschen Ende gekommen ist, hier noch eine Anmerkung:

In der Definition von quasi-endlich ist mit $f^{-1}(y)$ die Faser (als Schema) über y gemeint. In meinen Gegenbeispielen für c), e), f) hatte ich immer $Y = \text{Spec } k$, also Y einelementig, gewählt. Auf Übungsblatt 6 Aufgabe 2 haben wir aber schon eingesehen, dass $f^{-1}(Y)$, aufgefasst als topologischer Raum, homöomorph zum Urbild von Y unter f ist, wenn wir f als stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen X und Y auffassen. In meinen Gegenbeispielen gab es daher keinen Unterschied zwischen „topologisches Urbild nehmen“ und „Ausrechnen der Faser mit anschließendem Vergessen der Strukturgarbe“.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ein Schemamorphismus $f: X \rightarrow Y$ heißt **projektiv**, wenn es für ein $n \in \mathbb{N}_0$ ein kommu-

tatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}_Y^n \\
 & \searrow f & \swarrow \text{pr}_Y \\
 & & Y
 \end{array}$$

gibt, in dem i eine abgeschlossene Einbettung

ist. Dabei sei $\mathbb{P}_Y^n := \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\text{Spec}(\mathbb{Z})} Y$.

Zeige:

- Ist $Y = \text{Spec}(R)$ affin, so ist $\mathbb{P}_Y^n \cong \mathbb{P}_R^n$.

- b) Die Komposition von projektiven Morphismen ist projektiv.
- c) Abgeschlossene Einbettungen sind projektiv.
- d) Projektiv zu sein ist stabil unter Basiswechsel.
- e) Projektive Morphismen noetherscher Schemata sind eigentlich.

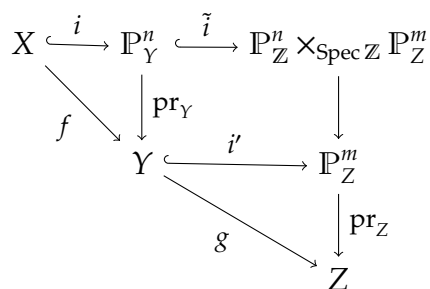
Hinweis: Erinnerung dich an die Segre-Einbettung von Blatt 7, Aufgabe 4, aus der Algebraischen Geometrie I.

Lösung: In der Übung haben wir die Aufgabenteile a) und c) gezeigt, sowie die folgende Behauptung:

Behauptung 1: Abgeschlossene Einbettung zu sein ist stabil unter Basiswechsel.

- b) Seien also $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ projektiv und m, n die natürlichen Zahlen, für die es eine abgeschlossene Einbettungen $i: X \hookrightarrow \mathbb{P}_Y^n$ bzw. $i': Y \hookrightarrow \mathbb{P}_Z^m$ gibt, über die f bzw. g faktorisiert.

Betrachte das Faserprodukt von $\mathbb{P}_Z^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} \mathbb{P}_Z^m$ und Y über \mathbb{P}_Z^m . Da für Schemata allgemein $A \times_B B = B$ und $(A \times_R B) \times_S C = A \times_R (B \times_S C)$ gilt, gilt auch $\mathbb{P}_Z^n \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} \mathbb{P}_Z^m \times_{\mathbb{P}_Z^m} Y \cong \mathbb{P}_Y^n$. Somit ist das obere rechte Viereck im kommutativen Diagramm



ein Faserprodukt und nach Behauptung 1 ist damit \tilde{i} eine abgeschlossene Einbettung.

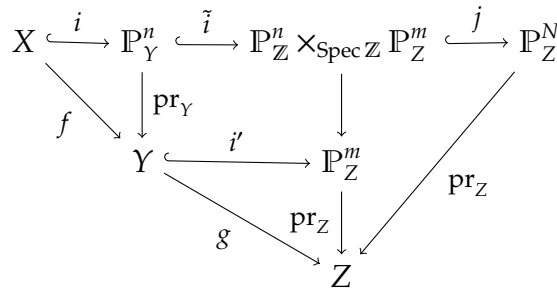
Weiter erinnern wir uns an die Segre-Einbettung $\Psi: \mathbb{P}^n(k) \times \mathbb{P}^m(k) \rightarrow \mathbb{P}^N(k)$ mit $N = (n + 1)(m + 1) - 1$ von Übungsblatt 7 Aufgabe 3 aus der Algebraischen Geometrie I. Dort haben wir gelernt, dass das Bild abgeschlossen in $\mathbb{P}^N(k)$ ist, nämlich $V(J)$ für ein J , das wir konkret angegeben hatten. Nun kann man sich klar machen, dass die durch J gegebenen Gleichungen alle schon über \mathbb{Z} definiert sind und die Konstruktion somit auch über \mathbb{Z} klappt. Alternativ (da wir das Tensorprodukt dieses Semester nicht mehr scheuen) definieren wir in Analogie zu Ψ einen Schemamorphismus $\Psi': \mathbb{P}_Z^n \times \mathbb{P}_Z^m \rightarrow \mathbb{P}_Z^N$ lokal auf $D_+(x_r) \times D_+(y_s)$ durch den surjektiven Ringhomomorphismus

$$\mathbb{Z} \left[\frac{z_{ij}}{z_{rs}} \mid (i, j) \in \{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\} \right] \longrightarrow \mathbb{Z} \left[\frac{x_0}{x_r}, \dots, \frac{x_n}{x_r} \right] \otimes \mathbb{Z} \left[\frac{y_0}{y_s}, \dots, \frac{y_m}{y_s} \right]$$

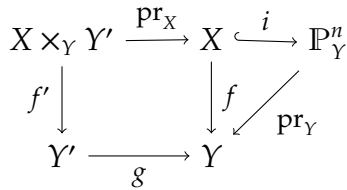
$$\longmapsto \frac{z_{ij}}{z_{rs}} \longmapsto \frac{x_i}{x_r} \otimes \frac{y_j}{y_s} .$$

Aus der lokalen Darstellung von Ψ' folgt sofort, dass Ψ' eine abgeschlossene Einbettung ist.

Basiswechsel mit dem Morphismus $\text{pr}_{\mathbb{P}_Z^N}$ liefert $j: \mathbb{P}_Z^n \times \mathbb{P}_Z^m \times Z \rightarrow \mathbb{P}_Z^N$. Nach Behauptung 1 ist j wieder eine abgeschlossene Einbettung. Die Komposition von abgeschlossenen Einbettungen ist eine abgeschlossene Einbettung, also ist $j \circ \tilde{i} \circ i$ eine abgeschlossene Einbettung und das folgende kommutative Diagramm beweist, dass $g \circ f$ ein projektiver Morphismus ist.

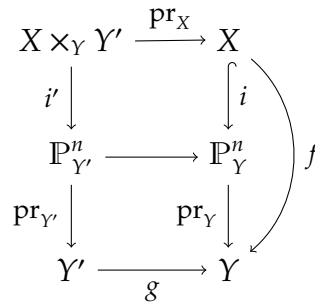


- d) Sei $f: X \rightarrow Y$ projektiv und $g: Y' \rightarrow Y$ ein beliebiger Schemamorphismus (der Basiswechsel).



Zu zeigen ist nun, dass auch f' projektiv ist.

Dazu machen wir uns klar, dass $\mathbb{P}_{Y'}^n = \mathbb{P}_Y^n \times_Y Y'$ und, dass $\mathbb{P}_{Y'}^n \times_{\mathbb{P}_Y^n} X = Y' \times_Y X$. Dann erhalten wir das folgende kommutative Diagramm:



Der Morphismus i ist nach Voraussetzung eine abgeschlossene Einbettung, nach Behauptung 1 also auch i' . Die beiden inneren Vierecke sind Faserprodukte und somit auch das äußere Viereck. Daher gilt $\text{pr}_{Y'} \circ i' = f'$ und f' ist ein projektiver Schemamorphismus.

- e) Seien X, Y noethersche Schemata und $f: X \rightarrow Y$ ein Schemamorphismus. Wir zeigen, dass $f = \text{pr}_Y \circ i$ eigentlich ist.

Nach Proposition 8.10 ist $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ eigentlich. Alle beteiligten Schemata sind noethersch, also ist nach Folgerung 8.9. „eigentlich“ stabil unter Basiswechsel und pr_Y eigentlich.

Abgeschlossene Einbettungen sind nach Bemerkung 8.4 separiert und nach Bemerkung 7.7 endlich (also insbesondere von endlichem Typ). Nach Behauptung 1 ist eine abgeschlossene Einbettung auch universell abgeschlossen. Damit ist i eigentlich.

Die Komposition von eigentlichen Morphismen ist eigentlich und somit ist f eigentlich.