Institut für Algebra and Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
M. Sc. Moritz Gruber

Lineare Algebra II

Sommer-Semester 2015

für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 11 **03.07.2015**

Aufgabe 1 *(Eine Zerlegung)*

Es sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und φ ein Automorphismus von V.

a) Zeigen Sie, dass es genau eine Isometrie f und genau einen selbstadjungierten Endomorphismus g mit ausschließlich positiven Eigenwerten gibt, sodass $\varphi = f \circ g$.

   Hinweis: Betrachten Sie $\varphi^* \circ \varphi$.

b) Bestimmen Sie die Zerlegung aus a) für den durch

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

   definierten Automorphismus von $\mathbb{R}^2$ (mit dem Standardskalarprodukt).

Aufgabe 2 *(Konstruktionen)*

Es sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und Φ, Ψ selbstadjungierte Endomorphismen von V. Zeigen Sie:

a) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\Phi + \lambda\Psi$ selbstadjungiert.

b) Gilt $\langle \Phi(v), v \rangle = \langle \Psi(v), v \rangle$ für alle $v \in V$, so gilt schon $\Phi = \Psi$.

c) $\Phi \circ \Psi$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$.

Abgabe bis 13 Uhr am Freitag, den 10.07., in die gelben Kästen. Diese befinden sich im Foyer des Kollegiengebäude Mathematik 20.30. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und dem Namen Ihres Tutors.