Institut für Algebra and Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
M. Sc. Moritz Gruber

Lineare Algebra II

für die Fachrichtung Informatik

Sommer-Semester 2015

Übungsblatt 12 **10.07.2015**

Aufgabe 1 *(Normale Endomorphismen)*

a) Welche der folgenden Endomorphismen sind normal?

(i) $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot x$ (ii) $\Phi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot x$

(iii) $\Phi_3 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-i & i \end{pmatrix} \cdot x$ (iv) $\Phi_4 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} 3+4i & 1 \\ i & 2+3i \end{pmatrix} \cdot x$

b) Es sei V ein euklidischer (bzw. unitärer) Vektorraum und Ψ ein normaler Endomorphismus von V. Zeigen Sie, dass auch Ψ^n, $n \in \mathbb{N}$, und $k \cdot \mathrm{id}_V + \Psi$, $k \in \mathbb{R}$ (bzw. $k \in \mathbb{C}$), normal sind.

Aufgabe 2 *(Euklidische Vektorräume)*

Es sei $V = \mathbb{R}^3$.

a) Zeigen Sie, dass

$$F : V \times V \to \mathbb{R},\ F(x,y) := x^T A y \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ein Skalarprodukt auf V definiert.

b) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von V bezüglich F.

c) Zeigen Sie, dass

$$\Phi(x) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot x$$

eine Isometrie von (V, F) ist und bestimmen Sie die Adjungierte von Φ.

Abgabe bis 13 Uhr am Freitag, den 17.07., in die gelben Kästen. Diese befinden sich im Foyer des Kollegiengebäude Mathematik 20.30. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und dem Namen Ihres Tutors.