Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
M. Sc. Moritz Gruber

Lineare Algebra II

Sommer-Semester 2015

für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 3 **08.05.2015**

Aufgabe 1 *(Skalarprodukt)*

a) Es sei V ein 2-dimensionaler euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $B = (b_1, b_2)$ eine Basis von V. Zeigen Sie das jeder Vektor $v \in V$ durch die Abstände $d(v, b_1)$, $d(v, b_2)$ und $d(v, 0)$ eindeutig bestimmt ist.

b) Entscheiden Sie jeweils, ob es sich bei F um ein Skalarprodukt auf V handelt:

(i) $V = \mathbb{R}^2$ und $F(x, y) := x^T Ay$ mit $x, y \in \mathbb{R}^2$ und $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$.

(ii) $V = \mathbb{R}[X]$, $F(p, q) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k q_k$ mit $p = \sum_{k=0}^{\infty} p_k X^k$, $q = \sum_{k=0}^{\infty} q_k X^k \in \mathbb{R}[X]$.

(iii) V reeller Vektorraum, E Skalarprodukt auf V und $F(v, w) := \sqrt{E(v, w)}$ für $v, w \in V$.

Aufgabe 2 *(Skalarprodukt und Polynome)*

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = \{p \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{grad}(p) \le n\}$ der Vektorraum der reellen Polynome von Grad $\le n$, sowie $x_0, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden.

a) Zeigen Sie, dass durch $\langle p, q\rangle := \sum_{i=0}^{d} p(x_i)q(x_i)$ eine symmetrische Bilinearform auf V definiert wird.

b) Zeigen Sie, dass diese genau dann positiv definit ist, wenn $d \ge n$ gilt.

c) Bestimmen Sie für $n = d = 2$ und $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ die Fundamentalmatrix von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezüglich der Basis $\{1, X, X^2\}$.

Abgabe bis 13 Uhr am Freitag, den 15.05., in die gelben Kästen. Diese befinden sich im Foyer des Kollegiengebäude Mathematik 20.30. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und dem Namen Ihres Tutors.