

Lineare Algebra II
für die Fachrichtung Informatik

Sommer-Semester 2015

Übungsblatt 4

15.05.2015

Aufgabe 1 (Orthogonalität, Fourierformel)

In Aufgabe 2 auf Übungsblatt 3 haben wir gesehen, dass auf $V = \{p \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad}(p) \leq 4\}$ durch $\langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^4 p(x_i)q(x_i)$ mit $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ und $x_4 = 2$ ein Skalarprodukt gegeben ist.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome eine Orthogonalbasis von V bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bilden:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1, & p_2 &= X, & p_3 &= X^2 - 2, \\ p_4 &= X^3 - \frac{34}{10}X, & p_5 &= X^4 - \frac{31}{7}X^2 + \frac{72}{35}. \end{aligned}$$

b) Finden Sie $\lambda_1, \dots, \lambda_5 \in \mathbb{R}$, sodass die $q_i := \lambda_i p_i$ eine Orthonormalbasis von V bilden.

c) Stellen Sie das Polynom $(X - 1)^4$ in dieser Orthonormalbasis dar.

Aufgabe 2 (Gram-Schmidt-Verfahren, Orthogonale Matrizen)

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle x, y \rangle := x^T \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} y.$$

b) Welche der folgenden Matrizen A, B, C, D und E sind orthogonal?

i) $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ Orthogonalbasis von \mathbb{R}^n bezüglich des Standardskalarproduktes und A die Matrix mit b_i als i -ter Spalte, $i = 1, \dots, n$.

ii) $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ Orthogonalbasis von \mathbb{R}^n bezüglich des Standardskalarproduktes und B die Matrix mit b_i in Koordinaten bezüglich der Basis \mathcal{B} als i -ter Spalte, $i = 1, \dots, n$.

iii) $C = \begin{pmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi \\ -\cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix}$.

iv) D mit $D^T \in O(n)$.

v) $E \in GL_n(\mathbb{R})$ mit $E^T = E^{-1}$.

Abgabe bis 13 Uhr am Freitag, den 22.05., in die gelben Kästen. Diese befinden sich im Foyer des Kollegengebäude Mathematik 20.30. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und dem Namen Ihres Tutors.