Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
M. Sc. Moritz Gruber

Lineare Algebra II

Sommer-Semester 2015

für die Fachrichtung Informatik

Übungsblatt 6 **29.05.2015**

Aufgabe 1 *(Orthogonales Komplement und Projektion)*

Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

a) Es seien $M, N \subseteq V$ Teilmengen. Für $A \subset V$ betrachten wir $A^\perp := \{v \in V \mid v \perp A\}$ den zu A orthogonalen Unterraum von V. Zeigen Sie:

(i) $M \subseteq N \Rightarrow N^\perp \subseteq M^\perp$.

(ii) $\langle M \rangle^\perp = M^\perp$, wobei $\langle M \rangle$ die lineare Hülle von M bezeichnet.

b) Sei nun $\dim V$ endlich und $U \neq V$ ein Untervektorraum von V sowie π die Orthogonalprojektion von V auf U. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) $\dim U = \dim V - 1$

(ii) Für alle $x, y \in V$ mit $\langle x, y \rangle = 0$ und $\langle \pi(x), \pi(y) \rangle = 0$ ist $x \in U$ oder $y \in U$.

Aufgabe 2 *(Abstände)*

a) Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{grad}(f) \leq 2\}$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$F(f, g) := \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V und den Abstand des Polynoms X^2 zum Untervektorraum $U = \langle 1, X \rangle$.

b) Es seien g, h zwei parallele Geraden in $\mathbb{R}^n$, d.h. 1-dimensionale affine Unterräume der Form $g = x_0 + \langle v \rangle$, $h = y_0 + \langle v \rangle$ mit $x_0, y_0, v \in \mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, dass der Abstand $d(g, h)$ von g zu h gegeben ist durch

$$d(g, h) = d(\pi_{\langle v \rangle^\perp}(x_0 - y_0), 0)$$

Abgabe bis 13 Uhr am Freitag, den 05.06., in die gelben Kästen. Diese befinden sich im Foyer des Kollegiengebäude Mathematik 20.30. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und dem Namen Ihres Tutors.