Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
M. Sc. Moritz Gruber

Lineare Algebra II

für die Fachrichtung Informatik

Sommer-Semester 2015

Übungsblatt 10 **26.06.2015**

Aufgabe 1 *(Spektralsatz)*

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und f ein Endomorphismus von V.

Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Der Endomorphismus f ist eine selbstadjungierte Isometrie.

(ii) Es gibt eine Orthonormalbasis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ von V aus Eigenvektoren von f und Eigenwerte $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ mit $f(v_i) = \varepsilon_i v_i$ für $1 \leq i \leq n$.

(iii) Es gibt einen Untervektorraum $U \subseteq V$, sodaß f eine Spiegelung an $U^\perp$, d.h. von der Form $f = \mathrm{id}_V - 2\pi_U$ ist. *(Vergleiche Aufgabe 2 auf Übungsblatt 7)*

Aufgabe 2 *(Nochmal Spektralsatz)*

Es sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $\Phi, \Psi : V \to V$ Endomorphismen mit $\Phi \circ \Psi = \Psi \circ \Phi$.

Zeigen Sie:

a) Jeder Eigenraum von Φ ist Ψ-invariant.

b) Falls Φ und Ψ selbstadjungiert sind, so gibt es eine Orthonormalbasis von V, deren Vektoren sowohl Eigenvektoren von Φ als auch von Ψ sind.

Abgabe bis 13 Uhr am Freitag, den 03.07., in die gelben Kästen. Diese befinden sich im Foyer des Kollegiengebäude Mathematik 20.30. Heften Sie die zur Abgabe bestimmten Blätter bitte zusammen, und versehen Sie diese mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und dem Namen Ihres Tutors.