Steilkurs Lineare Algebra 1 – einige wichtige Stationen

Für einen Körper K ist ein K-Vektorraum V eine Menge mit einer kommutativen und assoziativen Verknüpfung $+ : V \times V \to V$, für die es ein neutrales Element 0_V gibt und für jedes $v \in V$ ein $w \in V$ mit $v + w = 0_V$. Wir schreiben dann $w = -v$.
Weiter muss es eine „skalare Multiplikation"geben, d.h. eine Abbildung $\cdot : K \times V \to V$, sodass einige Relationen erfüllt sind:

- $\forall v \in V : \ 1_K \cdot v = v$
- $\forall a, b \in K, v \in V : (ab)v = a(bv)$ und $\ (a + b)v = av + bv$
- $\forall a \in K, v, w \in V : a(v + w) = av + aw$

Eine Teilmenge B von V heißt eine Basis von V, wenn sich jeder Vektor aus V auf eindeutige Weise als Linearkombination der Elemente in B schreiben lässt. Je zwei Basen von V haben gleich viele Elemente. Die Anzahl der Vektoren in einer Basis nennt man die Dimension von V.
Wenn $B = \{b_1, \ldots, b_d\}$ eine Basis von V ist, dann ist definitionsgemäß die Abbildung

$$L_B : K^d \to V, \ (a_1, \ldots, a_d)^\top \to \sum_{i=1}^{d} a_i b_i$$

bijektiv. Ihre Umkehrabbildung D_B ordnet jedem Vektor v das eindeutig bestimmte Koordinatentupel bezüglich B (in der gegebenen Reihenfolge) zu. Wir nennen $D_B(v)$ den Koordinatenvektor von v oder auch das Tupel, das v bezüglich B darstellt – daher der Buchstabe D und der Index B.
L_B hat die Eigenschaft

$$\begin{aligned}\forall (a_i), (a_i') \in K^d : L_B((a_i) + (a_i')) &= L_B((a_i + a_i')) = \textstyle\sum_i (a_i + a_i')b_i = \sum_i a_i b_i + \sum_i a_i' b_i \\ &= L_B((a_i)) + L_B((a_i')).\end{aligned}$$

Hier läuft i jeweils von 1 bis d, was ich der Übersicht halber nicht mit dazuschreibe.
Ähnlich zeigt man die Eigenschaft

$$\forall c \in K, (a_i) \in K^d : L_B(c \cdot (a_i)) = L_B((ca_i)) = \sum_i (ca_i)b_i = \sum_i c(a_i b_i) = c \sum_i a_i b_i = cL_B((a_i)).$$

Das bedeutet, dass L_B eine Lineare Abbildung von K^d nach V ist. Wegen der oben festgestellten Bijektivität ist demnach L_B ein Isomorphismus von Vektorräumen: Jeder Vektorraum ist zu einem Standardraum isomorph.
Nun seien V und W zwei beliebige endlichdimensionale Vektorräume (über demselben Körper) und $\Phi : V \to W$ eine lineare Abbildung, d.h.

$$\forall k, l \in K, v_1, v_2 \in V : \Phi(kv_1 + lv_2) = k\Phi(v_1) + l\Phi(v_2).$$

Wenn wir Φ auf einer Basis $B = \{b_1, \ldots, b_d\}$ von V kennen, dann kennen wir prinzipiell ganz Φ, denn für $v = \sum_j k_j b_j$ folgt

$$\Phi(v) = \Phi(\sum_j k_j b_j) = \sum_j k_j \Phi(b_j).$$

Es könnte sich also als lohnend erweisen, die Bilder $\Phi(b_j)$ festzuhalten. Wenn wir eine Basis $C = \{c_1, \ldots, c_e\}$ von W wählen, können wir die Vektoren $\Phi(b_j)$ schreiben als

$$\Phi(b_j) = \sum_i a_{i,j} c_i, \quad a_{i,j} \in K \text{ geeignet.}$$

Das liefert

$$\Phi(v) = \sum_i \sum_j a_{i,j} k_j c_i,$$

wir können also mithilfe der Zahlen $a_{i,j}$ aus dem Koordinatenvektor von v (bzgl. B) den Koordinatenvektor von $\Phi(v)$ (bzgl. C) berechnen.
Wir nennen $D_{C,B}(\Phi) := (a_{i,j})_{i,j} \in K^{e \times d}$ die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich der Basen B und C. Es gilt

$$D_C(\Phi(v)) = D_{C,B} \cdot D_B(v).$$

Rechter Hand steht ein Matrix-Vektor-Produkt.
Wenn speziell die letzten u Basisvektoren in B eine Basis des Kerns von Φ sind, $c_i = \Phi(b_i)$ für $1 \leq i \leq d - u - 1$, dann ist

$$D_{C,B}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Links oben steht hier die $(d - u) \times (d - u)$-Einheitsmatrix, alle anderen Einträge sind 0. Es ergibt sich die Dimensionsformel

$$\dim(V) = \dim(\text{Kern}(\Phi)) + \dim(\text{Bild}(\Phi)),$$

und wir nennen die Dimension des bildes auch den Rang von Φ. Das ist auch die Dimension einer (jeder) Abbldungsmatrix von Φ.
Anwendung: Wenn U und W zwei Untervektorräume eines größeren Vektorraums sind, so bilden wir

$$V := U \times W = \{(u, w) \mid u \in U, w \in W\}.$$

Dies ist ein Vektorraum (mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation). Seine Dimension ist $\dim(U) + \dim(W)$. Auf V definieren wir die Abbildung

$$\Delta : V \to U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}, \ \Delta((u, w)) := u - w.$$

Der Kern von Δ ist $\{(u, w) \mid u = w\}$, und dies ist isomorph zu $U \cap W$. Also folgt

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W).$$

Jedenfalls sieht man an obiger Basiswahl, dass die Menge aller Typen von Homomorphismen von einem in einen anderen Vektorraum sehr übersichtlich ist. Zwei Homomorphismen desselben Ranges lassen sich nach geeigneten Basiswahlen durch dieselben Matrizen beschreiben.

Dies ändert sich, wenn wir zu Endomorphismen übergehen und dann in Definitions- und Bildbereich dieselbe Basis benutzen sollten. Bei Wahl einer anderen Basis ist die neue Abbildungsmatrix dann sogar ähnlich zur ursprünglichen Matrix. Dabei heißen zwei quadratische Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ ähnlich, wenn ein $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert mit $SAS^{-1} = B$.
Die Lineare Algebra gibt nun insbesondere Aufschluss darüber, wann zwei quadratische Matrizen ähnlich sind, und versucht, Kriterien zu geben, dies ohne die Konstruktion einer Matrix S zu entscheiden.

Ein wichtiger Begriff hierbei ist der des Eigenwertes eines Endomorphismus. Dabei heißt $a \in K$ ein Eigenwert von Φ, falls ein $v \in V$ existiert, das nicht 0 ist und die Gleichung $\Phi(v) = av$ löst. Solch ein v heißt ein Eigenvektor zu a, die Menge aller Eigenvektoren ist dann also

$$\underbrace{\mathrm{Kern}(\Phi - a\mathrm{Id}_V)}_{=:\mathrm{Eig}(\Phi,a)} \setminus \{0\}.$$

Der hier definierte Vektorraum $\mathrm{Eig}(\Phi, a)$ heißt der Eigenraum von Φ zum Eigenwert a.
Φ heißt diagonalisierbar, wenn es einen Basis aus Eigenvektoren gibt. Das wiederum bedeutet nichts anderes, als dass bei geeigneter Basiswahl (Basis aus Eigenvektoren) die Abbildungematrix eine Diagonalmatrix ist. Eine Matrix heißt diagonalisierbar, wenn sie zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.
Wie kann man das entscheiden?
Die Zahl $a \in A$ ist genau dann ein Eigenwert der Matrix $A \in K^{n\times n}$, wenn der Rang von $A - aI_n$ kleiner ist als n, wenn also $A - aI_n$ nicht invertierbar ist. Anders gesagt: Wenn die Determinante von $A - aI_n$ 0 ist. Das führt zur Definition des charakteristischen Polynoms:

$$\mathrm{CP}_A(X) := \det(XI_n - A) \in K[X].$$

Die Eigenwerte von A sind genau die in K liegenden Nullstellen von $\mathrm{CP}_A(X)$. Da dieses Polynom Grad n hat, gibt es höchstens n Eigenwerte.

Die Matrix A ist diagonalisierbar genau dann, wenn das charakteristische Polynom folgendermaßen zerfällt:

$$\mathrm{CP}_A(X) = \prod_a (X - a)^{\dim(\mathrm{Eig}(A,a))}.$$

(Es zerfällt also in Linearfaktoren und die algebraische Vielfachheit stimmt jeweils mit der geometrischen überein.)

Nun muss aber eine Matrix nicht diagonalisierbar sein, selbst wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt. So ist etwa das charakteristische Polynom der $d \times d$-Matrix

$$J_d(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

gerade $(X - \lambda)^d$, die algebraische Vielfachheit des einzigen Eigenwertes λ ist demnach d, während seine geometrische Vielfachheit

$$\dim(\mathrm{Eig}(J_d(\lambda), \lambda)) = \dim(\mathrm{Kern}(J_d(\lambda) - \lambda I_d)) = d - \mathrm{Rang}((J_d(\lambda) - \lambda I_d)) = 1$$

nur 1 ist. Für $d > 1$ ist erfüllt diese Matrix also nicht das oben genannte Kriterium für die Diagonalisierbarkeit.
$J_d(\lambda)$ heißt das Jordankästchen der Länge d zu λ. Der Satz von der Jordanschen Normalform sagt nun, dass jede Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfält, zu einer Blockdiagonalmatrix ähnlich ist, die auf der Diagonale Jordankästchen sitzen hat, also zu einer Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{d_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}.$$

Hier müssen die Einträge $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ nicht paarweise verschieden sein. Man kann (durch eine Vertauschung der Basisvektoren) erreichen, dass die Kästchen zu einem Eigenwert nebeneinander stehen. Sie bilden dann den Jordanblock zu diesem Eigenwert. Sein Länge ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes; man kann ja das charakteristische Polynom einer Jordan-Normalform leicht ausrechnen und sieht das direkt. Die Anzahl der Jordankästchen zu einem Eigenwert ist gleich seiner geometrischen Vielfachheit; das sieht man ähnlich wie im Fall eines einzelnen Jordankästchens, wo wir das oben nachgerechnet haben: Die Dimension des Eigenraumes bei einem Jordankästchen ist 1, und dies ist auch der Anzahl der betrachteten Jordankästchen.

Steilkurs Lineare Algebra 2 – noch mehr wichtige Stationen
Ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum V ist eine symmetrische Bilinearform, die noch dazu positiv definit ist, was heißt: $\forall v \in V, v \neq 0 : \langle v, v\rangle > 0$.
Wenn man so ein Skalarprodukt hat, dann gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$\forall v, w \in V : \langle v, w\rangle^2 \leq \langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle.$$

Man bezeichnet $\langle v, v\rangle =: \|v\|^2$ als das Längenquadrat. Zwei Vektoren v, w heißen orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Eine Orthonormalbasis von V ist eine Basis aus paarweise orthogonalen Vektoren, die jeder Länge 1 haben.
Das Gram-Schmidt-Verfahren hilft, eine gegebene Basis durch eine solche ONB zu ersetzen. Wenn $\{b_1, \dots, b_n\}$ eine ONB von V sind, dann gilt für alle $v \in V$:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, b_i\rangle \cdot b_i.$$

Das ermöglicht es uns, etwa orthogonale Projektionen auf Unterräume formelmäßig aufzuschreiben. Dies ist wichtig bei Abstandsberechnungen. Wenn genauer $U \leq V$ ein Untervektorraum ist und $B = \{u_1, \dots, u_k\}$ eine ONB von U, so ist für jeden Vektor $v \in V$ der Vektor

$$\pi_{U^\perp}(v) := v - \sum_{i=1}^{k} \langle u_i, v\rangle u_i$$

orthogonal zu U und seine Länge ist der Abstand von v nach U.

Eine lineare Isometrie eines euklidischen Vektorraumes ist ein Endomorphismus Φ von V, der

$$\forall v, w \in V : \langle \Phi(v), \Phi(w)\rangle = \langle v, w\rangle$$

erfüllt. Bezüglich einer ONB von V ist dann die Abbildungsmatrix eine orthogonale Matrix A, d.h. $A^\top \cdot A = I$ – das sind genau die Matrizen, deren Spalten eine ONB des euklidischen Standardraumes sind. In Dimension 2 liefert das entweder eine Spiegelung (und ist dann reell diagonalisierbar) oder eine Drehung.
Wenn es bezüglich einer linearen Isometrie einen invarianten Untervektorraum gibt, dann ist auch der orthogonale Komplentärraum invariant. Dies kann man zum Beweis der Existenz einer Normalform heranziehen, denn das charakteristische Polynom von Φ zerfällt in lineare und quadratische reelle Faktoren, und diese liefern ein- und zweidimensionale Invariante Unterräume, sodass sich rekursiv V als orthogonale Summe von ein- und zweidimensionalen invarianten Untervektorrüamen schreiben lässt. Die Abbildungsmatrix von Φ bezüglich einer geeigneten ONB ist dann eine Blockdiagonalmatrix mit Diagonaleinträgen ± 1 (die möglichen reellen Eigenwerte) oder Drehkästchen.
Ein Endomorphismus heißt selbstadjungiert, wenn

$$\forall v, w \in V : \langle v, \Phi(w) \rangle = \langle \Phi(v), w \rangle.$$

Auch hier existiert zu jedem invarianten Untervektorraum ein invarianter Komplementärraum (nämlich wieder das orthogonale Komplement), allerding ist die Abbildungsmatrix bezüglich einer ONB symmetrisch und man kann nachrechnen, dass jeder komplexe Eigenwert in Wiklichkeit reell ist. Das zeigt, dass es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren gibt, der Endomorphismus also diagonalisierbar ist.

Nachtrag:
Die Konzepte *isometrischer Endomorphismus* und *selbstadjungierter Endomorphismus* werden beide unter das Konzept des *normalen Endomorphismus* subsumiert. Φ heißt normal, wenn $\Phi \circ \Phi^* = \Phi^* \circ \Phi$ gilt. Dabei ist Φ^* der zu Φ adjungierte Endomorphismus. Bei Isometrien ist $\Phi^* = \Phi^{-1}$, bei selbstadjungierten Endomorphismen ist $\Phi^* = \Phi$.
Für normale Endomorphismen gilt wieder, dass für jeden invarianten Unterraum U auc $U^\perp$ invariant ist. Da es immer invariante Unterräume der Dimension 1 oder 2 gibt, greift vollstänige Induktion, und man kann eine Zerlegung von V in 1- oder 2-dimensionale invariante Unterräume finden, wobei der Endomorphismus auf den 2-dimensionalen wie eine Drehstreckung agiert.