Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dr. Fabian Januszewski

24.04.2015

Modulformen - Übungsblatt 1

Es sei L ein Gitter in $\mathbb{C}$, d.h. eine Untergruppe, welche von einer $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$ erzeugt wird. Eine meromorphe Funktion f heißt *elliptisch*, wenn

$$\forall \omega \in L: \quad f(z+\omega) = f(z).$$

Wie in der Übung bezeichne

$$\wp_L(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \omega \in L} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

die Weierstraß'sche $\wp$-Funktion zum Gitter L.

Aufgabe 1

Es sei f eine elliptische Funktion zum Gitter L. Zeigen Sie:

(a) Die Menge S der Polstellen von f als Abbildung auf $\mathbb{C}/L$ ist endlich.

(b) Es gilt
$$\sum_{s \in S} \operatorname{Res}(f; s) = 0.$$

Hinweis: Gehen Sie analog zum Beweis der $k/12$-Formel vor.

Aufgabe 2

Aus der Übung wissen wir, daß $\wp_L$ und die Ableitung $\wp_L'$ elliptisch sind. Weiterhin ist $\wp_L$ gerade und $\wp_L'$ ungerade. Zeigen Sie:

(a) Für $z \in \mathbb{C} - L$ die folgende Äquivalenz:
$$\wp_L'(z) = 0 \iff 2z \in L.$$

(b) Als Abbildung auf dem Torus $\mathbb{C}/L$ hat $\wp_L'$ genau drei Nullstellen e_1, e_2, e_3.

(c) Die Funktionswerte
$$\wp_L(e_1),\ \wp_L(e_2),\ \wp_L(e_3),$$
sind paarweise verschieden.

Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 1.

Abgabe bis spätestens Freitag, den 28. April 2015, um 11:30 Uhr zu Beginn der Übung.