Karlsruher Institut für Technologie (KIT) 08.05.2015
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dr. Fabian Januszewski

Modulformen - Übungsblatt 3

Wir bezeichnen mit log den Hauptzweig des natürlichen Logarithmus.

Aufgabe 1

Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Wir sagen, daß das unendliche Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ *absolut konvergiert*, wenn für die Folge $a_n := b_n - 1$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

absolut konvergiert. Zeigen Sie:

(a) Das unendliche Produkt der b_n konvergiert genau dann absolut, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a_k| < 1$ für alle $k \geq N$ so daß die Reihe

$$\sum_{k=N}^{\infty} \log(b_n)$$

absolut konvergiert.

(b) Im Fall der absoluten Konvergenz gilt

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n := \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} b_i = \prod_{j=1}^{N-1} b_j \cdot \exp\left(\sum_{k=N}^{\infty} \log b_k\right).$$

(c) Es gilt $\prod_{n=1}^{\infty} b_n \neq 0$ genau dann, wenn $b_n \neq 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2

Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge analytischer Funktionen auf D. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

sei normal konvergent. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $z \in D$ konvergiert das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(z))$ absolut.

(b) Die Abbildung

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n): \quad D \to \mathbb{C},\ z \mapsto \prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(z))$$

ist analytisch.

(c) Die Nullstellenmenge von $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n)$ ist die Vereinigung der Nullstellenmengen aller $(1 + f_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Bitte wenden

Aufgabe 3

Es sei $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine beschränkte schwach multiplikative Funktion. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ konvergiert die Reihe

$$L_\phi(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \phi(n) n^{-s}$$

absolut und es gilt

$$L_\phi(s) = \prod_p \left(\sum_{k=1}^{\infty} \phi(p^k) p^{-sk} \right).$$

(b) Die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(s)$ hat in der rechten Halbebene der $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ keine Nullstelle.

Abgabe bis spätestens Freitag, den 15. Mai 2015, um 11:30 Uhr zu Beginn der Übung.