Karlsruher Institut für Technologie (KIT) 21.05.2015
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dr. Fabian Januszewski

Modulformen - Übungsblatt 4

Es sei K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Wir nennen K einen *quadratischen Zahlkörper*, falls $[K:\mathbb{Q}] = 2$. Ist K ein quadratischer Zahlkörper und existiert ein Monomorphismus $K \to \mathbb{R}$, so nennen wir K *reell*, ansonsten *imaginär*. Einen Teilring $\mathcal{O} \subseteq K$, welcher ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang 2 ist (d.h. als abelsche Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}^2$), nennen wir eine *Ordnung* von K.

Aufgabe 1

Es sei K ein quadratischer Zahlkörper. Zeigen Sie:

(a) Es existiert stets ein quadratfreies $d \in \mathbb{Z}$ mit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ und die von $1, \sqrt{d}$ erzeugte Gruppe $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ist eine Ordnung in K.

(b) K ist genau dann reell, wenn d aus (a) positiv ist.

(c) Ist K reell, so existieren genau zwei verschiedene Einbettungen $K \to \mathbb{R}$. Ist K imaginär, so existieren genau zwei verschiedene Einbettungen $K \to \mathbb{C}$ und diese sind zueinander komplex konjugiert.

Aufgabe 2

Es sei K ein quadratischer Zahlkörper. Zeigen Sie, daß eine bezüglich der Teilmengenrelation $\subseteq$ maximale Ordnung in K existiert. Diese ist eindeutig bestimmt und ist durch

$$\mathcal{O}_K := \{\alpha \in K \mid \exists a, b \in \mathbb{Z} : \alpha^2 + a\alpha + b = 0\}$$

gegeben.

Aufgabe 3

Zeigen Sie:

(a) Es sei K ein imaginärquadratischer Zahlkörper. Wir identifizieren K als Teilmenge von $\mathbb{C}$ bezüglich einer fest gewählten Einbettung. Dann sind die Ideale $\mathfrak{a} \neq 0$ in einer Ordnung $\mathcal{O}$ von K stets Gitter in $\mathbb{C}$.

(b) Es sei L ein Gitter in $\mathbb{C}$. Dann ist

$$\mathcal{O}_L := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha L \subseteq L\}$$

entweder $\mathbb{Z}$ oder eine Ordnung in einem imaginärquadratischen Zahlkörper $K \subseteq \mathbb{C}$.

Bemerkung: Ist $E = \mathbb{C}/L$ eine elliptische Kurve über $\mathbb{C}$, so identifiziert sich $\mathcal{O}_L$ mit dem Endomorphismenring von E. Die Kurve E hat *komplexe Multiplikation*, falls $\mathcal{O}_L \neq \mathbb{Z}$.

Abgabe immer gern gesehen.