Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dr. Fabian Januszewski

29.05.2015

Modulformen - Übungsblatt 5

Es sei X ein topologischer Raum. Eine stetige Abbildung $\gamma : [0;1] \to X$ nennen wir einen *Weg* in X. Dabei heißt $\gamma(0)$ der *Anfangs*- und $\gamma(1)$ der *Endpunkt* von γ. Zwei Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [0;1] \to X$ heißen *homotop*, falls es eine stetige Abbildung

$$F : [0;1] \times [0;1] \to X$$

gibt mit den folgenden beiden Eigenschaften:

$$\forall t \in [0;1] : \quad F(0,t) = \gamma_0(t) \text{ und } F(1,t) = \gamma_1(t),$$

$$\forall s \in [0;1] : \quad F(s,0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0) \text{ und } F(s,1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1).$$

Wir schreiben in diesem Fall auch $\gamma_0 \sim \gamma_1$. Die Homotopierelation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. Für die *Homotopieklasse* eines Weges γ, d.h. die Äquivalenzklasse von γ bezüglich $\sim$, schreiben wir $[\gamma]$. Sind α, β zwei Wege in X und hat β als Startpunkt den Endpunkt von α, so bezeichne $\alpha\beta$ den Weg

$$\alpha\beta : [0;1] \to X, \quad t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{falls } t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2t-1) & \text{falls } t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dann ist $[\alpha][\beta] := [\alpha\beta]$ wohldefiniert.
Es sei $\mathscr{R}$ eine Riemannsche Fläche, $P_0 \in \mathscr{R}$ ein fest gewählter Punkt und es bezeichne

$$\mathscr{R}^{\mathrm{u}} := \{[\gamma] \mid \gamma \text{ ist Weg in } \mathscr{R} \text{ mit Startpunkt } P_0\}.$$

Weiterhin definieren wir

$$p : \mathscr{R}^{\mathrm{u}} \to \mathscr{R}, \ [\gamma] \mapsto \gamma(1).$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert.
Es sei $U \subseteq \mathscr{R}$ eine beliebige Koordinatenumgebung eines beliebigen Punktes $P \in \mathscr{R}$ und $Q = [\gamma] \in \mathscr{R}^{\mathrm{u}}$ ein beliebiges Urbild von P unter p. Wir definieren desweiteren

$$U_Q := \{[\gamma\omega] \in \mathscr{R}^{\mathrm{u}} \mid \omega \text{ ist ein Weg in } U \text{ mit Startpunkt } P\}.$$

Wir versehen $\mathscr{R}^{\mathrm{u}}$ mit der von der Gesamtheit der U_Q (als offene Mengen) erzeugten Topologie.
Wir sagen, daß eine analytische Abbildung $f : \mathscr{R} \to \mathscr{R}'$ Riemannscher Flächen *unverzweigt* ist, falls es zu jedem $P \in \mathscr{R}$ eine Umgebung U von P gibt, so daß die Einschränkung von f auf U eine Bijektion $U \to f(U)$ induziert.

Bitte wenden!

Aufgabe 1

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung p ist surjektiv.

(b) Zeigen Sie, daß die Einschränkung von p auf U_Q eine Bijektion $U_Q \to U$ induziert. Weiterhin zerfällt $p^{-1}(U)$ in eine disjunkte Vereinigung der Mengen U_Q, wobei $Q \in p^{-1}(P)$ sämtliche Urbilder von P durchläuft.

(c) Auf $\mathscr{R}^{\mathrm{u}}$ erhalten wir durch die Gesamtheit der Abbildungen $c_U \circ p|_{U_Q} : U_Q \to \mathbb{C}$, wobei $(U, c_U : U \to \mathbb{C})$ den Atlas von $\mathscr{R}$ durchläuft, einen Atlas auf $\mathscr{R}^{\mathrm{u}}$, welcher $\mathscr{R}^{\mathrm{u}}$ zu einer Riemannschen Fläche macht.

(d) Die Abbildung p ist analytisch und unverzweigt und das Paar $(\mathscr{R}^{\mathrm{u}}, p)$ hat folgende universelle Eigenschaft: Ist $\mathscr{R}'$ eine Riemannsche Fläche und $f : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$ analytisch, surjektiv und unverzweigt, so existiert ein eindeutig bestimmtes analytisches $p' : \mathscr{R}^{\mathrm{u}} \to \mathscr{R}'$ mit $p = f \circ p'$. Durch diese Eigenschaft ist $(\mathscr{R}^{\mathrm{u}}, p)$ bis auf Isomorphie (Riemannscher Flächen) eindeutig bestimmt.

(e) Das Paar $(\mathscr{R}^{\mathrm{u}}, p')$ hat eine analoge universelle Eigenschaft.

(f) Die Gruppe der analytischen Decktransformationen

$$G(\mathscr{R}^{\mathrm{u}}/\mathscr{R}) := \{\phi \in \mathrm{Aut}(\mathscr{R}^{\mathrm{u}}) \mid p \circ \phi = p\}$$

hat folgende Eigenschaft: Zu jedem $Q \in \mathscr{R}^{\mathrm{u}}$ existiert eine Umgebung U von Q mit

$$\forall g \in G(\mathscr{R}^{\mathrm{u}}/\mathscr{R}) : \quad U \cap gU \neq \emptyset \Longrightarrow g = 1.$$

(g) Zu jeder Untergruppe $H \subseteq G(\mathscr{R}^{\mathrm{u}}/\mathscr{R})$ existiert ein (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmtes Paar $(\mathscr{R}', p')$, so daß $p' : \mathscr{R}' \to \mathscr{R}$ surjektiv, analytisch und unverzweigt ist, und weiterhin $G(\mathscr{R}^{\mathrm{u}}/\mathscr{R}') = H$ gilt.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie das Paar $(\mathscr{R}^{\mathrm{u}}, p)$ für die Riemannsche Fläche $\mathscr{R} = \mathbb{C}^\times$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie das Paar $(\mathscr{R}^{\mathrm{u}}, p)$ für die Riemannsche Zahlkugel $\mathscr{R} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Abgabe immer gerne, jederzeit!