Karlsruher Institut für Technologie (KIT) 09.06.2015
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dr. Fabian Januszewski

Modulformen - Übungsblatt 6

Auf diesem Übungsblatt sind $\mathscr{R}$ und $\mathscr{R}'$ (zusammenhängende) kompakte Riemannsche Flächen und $f:\mathscr{R}\to\mathscr{R}'$ ist eine nicht-konstante analytische Abbildung.

Aufgabe 1

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung f ist surjektiv.

(b) Jedes $P\in\mathscr{R}$ ist lokal von der Gestalt

$$z \;\mapsto\; z^{e_P}$$

mit einer ganzen Zahl $e_P\geq 1$ für eine geeignete komplexe Koordinate z bei P. Wir nennen e_P den *Verzweigungsindex* und f heißt bei P *verzweigt* wenn $e_P>1$, P ist dann ein *Verzweigungspunkt*.

(c) f ist bei P unverzweigt genau dann, wenn $e_P=1$ (vgl. Übungsblatt 5).

(d) f besitzt nur endlich viele Verzweigungspunkte.

(e) Jedes $P'\in\mathscr{R}'$ besitzt nur endlich viele Urbilder unter f und es gilt

$$n_f \;=\; \sum_{P\in f^{-1}(P')} e_P$$

ist unabhängig von P'. Wir nennen n den *Grad* von f.

(f) ist $g:\mathscr{R}'\to\mathscr{R}''$ eine weitere surjektive analytische Abbildung Riemannscher Flächen, dann ist $\mathscr{R}''$ kompakt und es gilt

$$n_{g\circ f} \;=\; n_g\cdot n_f.$$

und Verzweigungsindizes verhalten sich ebenfalls ebenfalls multiplikativ.

Aufgabe 2

Es sei $\mathbb{H}^*:=\mathbb{H}\cup\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$. Wir wissen aus der Vorlesung, daß für jedes $N\geq 1$ der Quotient $\Gamma(N)\backslash\mathbb{H}^*$ eine kompakte Riemannsche Fläche ist.

(a) Bestimmen Sie die Verzweigungspunkte und Verzweigungsindizes der natürlichen Projektion

$$p_N:\Gamma(N)\backslash\mathbb{H}^* \;\to\; \Gamma(1)\backslash\mathbb{H}^*=\mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

(b) Bestimmen sie für jedes M,N mit $M\mid N$ die Verzweigungspunkte und Verzweigungsindizes der natürlichen Projektion

$$p_{N,M}:\Gamma(N)\backslash\mathbb{H}^* \;\to\; \Gamma(M)\backslash\mathbb{H}^*.$$

Abgabe stets gern gesehen.