Karlsruher Institut für Technologie (KIT) 19.06.2015
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dr. Fabian Januszewski

Modulformen - Übungsblatt 8

Auf diesem Übungsblatt sei $k \in \mathbb{Z}$. Vereinfachend nehmen wir an, daß k gerade ist. Desweiteren sei Γ eine Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ von endlichem Index und $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ sei eine holomorphe Abbildung mit

$$\forall z \in \mathbb{H}, \gamma \in \Gamma : \quad f(z) = (cz+d)^{-k} f(\gamma z).$$

Aufgabe 1

Zeigen Sie, daß aus der Existenz eines $C \in \mathbb{R}$, eines reellen $\nu > 0$ und eines $\varepsilon > 0$ mit

$$\forall z \in \mathbb{H} : \quad |\mathrm{Im}(z)| < \varepsilon \Longrightarrow |f(z)| \leq C \cdot |\mathrm{Im}(z)|^{-\nu}$$

folgt, daß f an allen Spitzen von Γ holomorph ist. Insbesondere ist in diesem Fall f eine *Modulform* zu Γ vom Gewicht k. Gilt $\nu < k$, so ist f sogar eine *Spitzenform.*
Hinweis: Betrachte die Fourier-Entwicklung von f an den Spitzen. Dann lassen sich die Fourier-Koeffizienten durch f ausdrücken und die bekannte Formel für $\mathrm{Im}(\alpha z)$ hilft, um den Betrag der Fourier-Koeffizienten abzuschätzen.

Aufgabe 2

Verfeinern Sie das Argument der Aufgabe 1, um folgende Äquivalenz zu zeigen:

$$f \text{ ist eine Spitzenform} \quad \Longleftrightarrow \quad f(z)\mathrm{Im}(z)^{\frac{k}{2}} \text{ ist auf } \mathbb{H} \text{ beschränkt.}$$

Aufgabe 3

Aus Aufgabe 2 ergibt sich folgende Abschätzung für die Fourierkoeffizienten $(a_n)_{n\geq 1}$ einer Spitzenform f: Es existiert eine Konstante C mit

$$\forall n \geq 1 : \quad |a_n| \leq C \cdot n^{\frac{k}{2}}.$$

Abgabe jederzeit und warum nicht?