Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dr. Fabian Januszewski 26.06.2015

Modulformen - Übungsblatt 9

Es bezeichne E_4 die Eisensteinreihe vom Gewicht 4 und Δ die Diskriminante, die „kanonische“ normalisierte Spitzenform vom Gewicht 12. Für $z \in \mathbb{H}$ definieren wir

$$g_2(z) := 60 \cdot E_4(z) \text{ und damit } J(z) := 12 \cdot j(z) = \frac{12 g_2(z)^3}{\Delta(z)}.$$

Aufgabe 1

Zeigen Sie, daß $J(z)$ eine unter $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ invariante holomorphe Abbildung auf $\mathbb{H}$ ist und bei ∞ eine Fourier-Entwicklung der Form

$$J(z) = q^{-1} \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n\right), \quad q = e^{2\pi i z},$$

mit $c_n \in \mathbb{Z}$ hat.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, daß für alle $a_0, a_1, \ldots, b_{n_0}, b_{n_0+1}, \cdots \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\forall z \in \mathbb{H}: \quad \sum_{k=0}^{m} a_k J(z)^k = \sum_{n \geq n_0} b_n e^{2\pi i n z}$$

impliziert, daß alle $a_0, \ldots, a_m$ im von den b_n erzeugten Ring $\mathbb{Z}[b_n \mid n \geq n_0]$ liegen.

Abgabe gerne auch am Freitag!