Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra and Geometrie
Dr. Fabian Januszewski
Dipl.-Inform. Tobias Columbus

p-adische Modulformen

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 *Ein explizites Beispiel*
Betrachten Sie die affine Gruppe $\mathrm{GL}_2 \colon k\text{–Alg} \to \mathrm{Grp}$, $A \mapsto \mathrm{GL}_2(A)$. Zeigen Sie, dass GL_2 durch eine k-Algebra B darstellbar ist. Geben Sie weiterhin explizite k-Algebrenhomomorphismen $m \colon B \to B \otimes_k B$ und $i \colon B \to B$, die der Multiplikation bzw. Inversion der 2×2-Matrizen entsprechen, an.

Aufgabe 2 *Die symmetrische Algebra und lineare Abbildungen*
Sei k ein Körper und V ein k-Vektorraum.

(a) Die symmetrische Algebra $\mathrm{Sym}(V)$ ist per Definition die Algebra

$$\mathrm{Sym}(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n} / I,$$

wobei I das von den Differenzen $x \otimes y - y \otimes x$ mit $x, y \in V$ erzeugte Ideal ist. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sym}(V)$ eine unitäre, kommutative und assoziative k-Algebra ist.

(b) Sei nun $D \colon k\text{–Alg} \to \mathrm{Grp}$ der Funktor, der eine k-Algebra A auf die additive Gruppe $\hom(V, A)$ der k-linearen Abbildungen $V \to A$ abbildet. Zeigen Sie, dass D darstellbar ist.

Aufgabe 3 *Kerne von affinen Gruppen*

(a) Zeige, dass

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ B \arrow[r] & B \otimes_A C \end{tikzcd}$$

ein kokartesisches Quadrat in der Kategorie k–Alg der k-Algebren ist.

(b) Zeige, dass jeder Morphismus $f \colon G \to H$ in der Kategorie $\mathrm{Grp}_{\mathrm{aff}}$ der affinen Gruppen einen Kern besitzt.

(c) Zeige, dass für jede k-Algebra A die A-wertigen Punkte des Kerns von $f \colon G \to H$ genau der Kern des Homomorphismus $G(A) \to H(A)$ sind.

(d) Berechne den Kern der Determinante $\det \colon \mathrm{GL}_n \to \mathbb{G}_m$.

Aufgabe 4 *Eine auflösbare Untergruppe von* SL_n
Sei k ein Körper und sei $\mathrm{SL}_n(k)$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in k und Determinante 1. Zeigen Sie, dass die Untergruppe B der oberen Dreiecksmatrizen $B \subseteq \mathrm{SL}_n(k)$ auflösbar ist.

Abgabe am Donnerstag, den 31. 10. 2013 in der Übung.