Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Fabian Januszewski
Dipl.-Inform. Tobias Columbus

p-adische Modulformen
Übungsblatt 10

Aufgabe 1 *Interpolation durch Reihen*
Sei k eine Erweiterung von $\mathbf{Q}$ und $A \subseteq k$ ein Teilring. Weiter sei $f\colon \mathbf{N} \to A$ eine beliebige Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Folge $(a_i)_i$ von Koeffizienten aus A gibt, so dass

$$f(n) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \binom{n}{i}$$

für alle $n \in \mathbf{N}$.

Sei nun k die p-adische Vervollständigung eines Zahlkörpers und $A = \mathcal{O} \subseteq k$ der Ganzheitsring.

(b) Zeigen Sie, dass $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$, falls f die Einschränkung einer stetigen Funktion $\mathbf{Z}_p \to A$ ist.

(c) Sei nun eine Folge $(a_i)_i$ mit $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \binom{x}{i}$$

für jedes $x \in \mathbf{Z}_p$ gleichmäßig konvergiert. Dabei sei für $x \in \mathbf{Z}_p$ der Binomialkoeffizient als

$$\binom{x}{i} = \frac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!}$$

definiert.

Schlussfolgern Sie, dass eine Funktion $\mathbf{Z}_p \to \mathcal{O}$ dann und nur dann stetig ist, wenn der Grenzwert der zugehörigen Folge $(a_i)_i$ aus Teil (a) verschwindet. Verallgemeinern Sie diese Beobachtung auf Teilringe $\mathcal{O} \neq A \subseteq k$.

Aufgabe 2 *Interpolation von Eisenstein-Koeffizienten, Teil 1*
Sei $p > 2$ prim. Der p-adische Logarithmus log und die p-adische Exponentialfunktion exp sind durch die Potenzreihen

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

und

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass log einen Isomorphismus zwischen der multiplikativen Gruppe $1 + p\mathbf{Z}_p$ und der additiven Gruppe $p\mathbf{Z}_p$ definiert.

(b) Zeige, dass $s\colon 1 + p\mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_p$ mit

$$s(1+y) = \frac{\log(1+y)}{\log(1+p)}$$

ein wohldefinierter Isomorphismus ist.

(c) Zeige, dass für $d \equiv 1(p)$ die formale Potenzreihe

$$f_d(T) = d^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{s(d)}{i} T^i$$

bei $(1+p)^k - 1$ ausgewertet werden kann und dort den Wert d^{k-1} annimmt.

Aufgabe 3 *Interpolation von Eisenstein-Koeffizienten, Teil 2*
Sei $p > 2$ prim.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{Z}_p^\times$ das Produkt der maximalen Torsionsuntergruppe $\mu \subseteq \mathbf{Z}_p^\times$ und der Gruppe $1 + p\mathbf{Z}_p$ ist. Betrachten Sie dazu den Teichmüller-Charakter $\omega\colon \mathbf{Z}_p^\times \to \mu$ mit $\omega(x) = \lim_{n\to\infty} x^{p^n}$ und die Funktion $x \mapsto \langle x\rangle = \omega(x)^{-1}x$.

Wir schreiben ab jetzt $u = (1+p)$.

(b) Definiere für eine natürliche Zahl $d > 0$ mit $p \nmid d$ eine formale Potenzreihe

$$f_d(T) = d^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{s(\langle d\rangle)}{i} T^i .$$

Zeigen Sie, dass diese Definition mit der Definition aus Teil (c) von Aufgabe 2 übereinstimmt, falls $d \equiv 1(p)$. Zeigen Sie weiter, dass man f_d bei $u^k - 1$ auswerten kann und so den Wert $\omega(d)^{-k} d^{k-1}$ erhält.

(c) Wir definieren nun die formalen Potenzreihen

$$A(n;T) = \sum_{\substack{d\mid n\\ (p,d)=1}} f_d(T)$$

und

$$E(T) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n;T) q^n$$

in $\Lambda = \mathbf{Z}_p[[T]]$ bzw. $\Lambda[[q]]$. Dabei sei $A(0;T)$ eine nicht näher spezifizierte Potenzreihe[1] mit der Eigenschaft

$$A(0;T)\big((1+p)^k - 1\big) = \frac{1}{2}(1-p^{k-1})\zeta(1-k) .$$

Zeigen Sie, dass

$$E(T)(u^k - 1) = E_k(z) - p^{k-1}E_k(pz)$$

für jedes k mit $k \equiv 0(p-1)$.

Abgabe am Donnerstag, den 23. 1. 2014 in der Übung.

[1] Eine solche Potenzreihe existiert. Die Konstruktion würde jedoch auf jeden Fall den Rahmen dieses Übungsblattes sprengen. Vielleicht kommen wir auf dem nächsten Blatt darauf zurück.