Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Fabian Januszewski
Dipl.-Inform. Tobias Columbus

p-adische Modulformen
Übungsblatt 11

Auf diesem Blatt sei R ein kommutativer Ring mit 1. Ein Modul ist stets einen Modul über R.

Eine *(kohomologische) Spektralsequenz* ist eine Familie $E_r^{p,q}$, $r \geq a$, von Moduln zusammen mit Differentialen $d_r^{pq} \colon E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$ und Isomorphismen $E_{r+1}^{p,q} \cong \ker d_r^{pq} / \operatorname{im} d^{p-r,q+r-1}$. Sie beginnt auf der Seite a.

Auf diesem Blatt ist stets $E_r^{p,q} = 0$ falls $p < 0$ oder $q < 0$. Dann gibt es für alle p und q offenbar ein r, so dass $E_r^{p,q} = E_{r+d}^{p,q}$ für alle $d \geq 0$.[1] Diesen stabilen Wert von $E_r^{p,q}$ schreibt man auch $E_\infty^{p,q}$.

Eine Spektralsequenz $E_r^{p,q}$ *konvergiert* gegen eine Familie H^n, $n \in \mathbf{N}$, von Moduln, falls jedes der H^n eine endliche Filtrierung $0 = F^{n+1}H^n \subseteq \ldots \subseteq F^{p+1}H^n \subseteq F^pH^n \subseteq F^{p-1}H^n \subseteq \ldots \subseteq F^0H^n = H^n$ besitzt, so dass $E_\infty^{p,q} \cong F^pH^{p+q}/F^{p+1}H^{p+q}$ für alle p und q. Man schreibt dann auch $E_a^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}$.

Aufgabe 1 *Exakte Paare*

Ein *exaktes Paar* (D, E, i, j, k) besteht aus zwei $\mathbf{Z}$-bigraduierten Moduln $D = \bigoplus D^{p,q}$ und $E = \bigoplus E^{p,q}$ sowie drei Abbildungen i, j und k von bigraduierten Moduln, derart dass die Sequenz

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

an jedem Knoten exakt ist. Für den Rest dieser Aufgabe fixieren wir ein solches exaktes Paar dessen Abbildungen den Bigrad $\deg(i) = (-1, 1)$, $\deg(j) = (a, -a)$ und $\deg(k) = (0, 1)$ besitzen.

(a) Zeigen Sie, dass $d_{(0)} = jk$ ein Differential auf E definiert und dass die Abbildungen

$$i_{(1)} \colon iD \to iD, d \mapsto i(d) \quad j_{(1)} \colon iD \to H(E, d), i(d) \mapsto j(d) \quad k_{(1)} \colon H(E, d) \to iD, \overline{x} \mapsto k(x)$$

wohldefiniert sind und sich zu einem exakten Paar

$$\begin{tikzcd} iD \arrow[rr, "i_{(1)}"] & & iD \arrow[dl, "j_{(1)}"] \\ & H(E,d) \arrow[ul, "k_{(1)}"] & \end{tikzcd}$$

zusammenfügen lassen. Dieses Paar nennt man das *abgeleitete Paar*. Die Bildung des abgeleiteten Paares lässt sich offenbar iterieren und man erhält so eine Folge $(D_s, E_s, i_{(s)}, j_{(s)}, k_{(s)})$, $s \geq 0$, von exakten Paaren, welche mit $(D_0, E_0, i_{(0)}, j_{(0)}, k_{(0)}) = (D, E, i, j, k)$ beginnt.

Berechnen Sie den Bigrad von $i_{(s)}$, $j_{(s)}$ und $k_{(s)}$ sowie des zugehörigen Differentials $d_{(s)} = j_{(s)}k_{(s)}$. Schliessen Sie, dass die Familie $E_r^{p,q}$ zusammen mit den Differentialen $d_{(r)}$ für $r = s + a$ eine Spektralsequenz bildet, die auf Seite a beginnt.

(b) Zeigen Sie, dass man in der Folge von exakten Paaren aus Teil (a) die Identifikation $E_s = Z_s/B_s$ mit $Z_s = k^{-1}(i^sD)$ und $B_s = j(\ker i^s)$ vornehmen kann.

(c) Sei nun $D^{p,q} = 0$ falls $q < \max(a, 1)$ und $i \colon D^{p,q} \to D^{p-1,q+1}$ für $p < \max(1-a, 0)$ ein Isomorphismus. Sei H^n der Wert von $D^{p,n-p}$ für $p < \max(1-a, 0)$ und sei F^pH^n das Bild von $D^{p+a,n-p-a}$ in H^n.

Zeigen Sie, dass es eine natürliche Injektion $F^pH^n/F^{p+1}H^n \to E_\infty^{p,n-p}$ gibt, die genau dann ein Isomorphismus ist, falls

$$\bigcap_r k^{-1}(i^rD) = k^{-1}(0) = j(D)\,.$$

Schlussfolgern Sie, dass die Spektralsequenz in diesem Falle gegen H^* konvergiert.

[1] Warum?

Aufgabe 2

(a) Es sei C ein Komplex von Moduln und $\ldots \subseteq F^pC \subseteq F^{p-1}C \subseteq \ldots \subseteq F^0C = C$ eine Filtrierung durch Unterkomplexe, so dass $F^{n+1}C^n = 0$ für alle n. Organisieren Sie die langen exakten Kohomologiesequenzen, die zu den kurzen exakten Sequenzen

$$0 \to F^{p+1}C \to F^pC \to F^pC/F^{p+1}C \to 0$$

gehören in ein exaktes Paar. Berechnen Sie die $E_1^{*,*}$-Terme der zugehörigen Spektralsequenz und zeigen Sie, dass diese gegen $H^*(C)$ konvergiert.

(b) Die Filtrierungen eines Doppelkomplexes nach Zeilen bzw. Spalten induzieren beide eine Filtrierung des Totalkomplexes $\mathrm{Tot}_nC = \bigoplus_{p+q=n} C^{p,q}$. Zeigen Sie, dass die Spektralsequenzen aus Teil (a) beide gegen $H^*\mathrm{Tot}C$ konvergieren falls $C^{p,q} = 0$ für $p < 0$ oder $q < 0$. Berechnen Sie die $E_1^{*,*}$-Terme sowie die Differentiale $E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$ der beiden Spektralsequenzen.

(c) Nutzen Sie die Ergebnisse aus Teil (b) um zu zeigen, dass die Gruppenkohomologie $H^*(G,M)$ auch als Kohomologie des Komplexes $\hom(k, I_0) \to \hom(k, I_1) \to \ldots$ für eine injektive Auflösung $M \to I_*$ von M berechnet werden kann.

Aufgabe 3 *Die Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralsequenz*

Es sei G eine Gruppe und N eine normale Untergruppe von G. Eine *Cartan-Eilenberg-Auflösung* eines nach unten beschränkten Komplexes C^* von G-Moduln ist ein Doppelkomplex $A^{*,*}$ von injektiven G-Moduln $A^{*,*}$ zusammen mit einer Coaugmentation $\varepsilon\colon C^* \to A^{*,0}$, so dass die induzierten Komplexe der Koränder und der Kohomologie bzgl. der ersten Koordinate Auflösungen der Koränder bzw. der Kohomologie von C_* sind. Jeder nach unten beschränkte Komplex von G-Moduln besitzt eine Cartan-Eilenberg-Auflösung.[2]

(a) Zeigen Sie die Existenz einer Spektralsequenz

$$E_2^{pq} = H^p(G/N, H^q(N,M)) \Rightarrow H^{p+q}(G,M)\,.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Zeigen Sie, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G\text{–Mod} \arrow[rr, "(-)^N"] \arrow[dr, "(-)^G"'] & & G/N\text{–Mod} \arrow[dl, "(-)^{(G/N)}"] \\ & R\text{–Mod} & \end{tikzcd}$$

von Funktoren kommutiert und dass $(-)^N$ injektive G-Moduln auf injektive G/N-Moduln abbildet.

(ii) Wählen Sie eine injektive Auflösung $M \to I^*$ in G–Mod und betrachten Sie eine Cartan-Eilenberg-Auflösung $A^{*,*}$ von $(I^*)^N$ in G/N–Mod sowie ihr Bild $(A^{*,*})^{(G/N)}$ in R–Mod. Letzterer Komplex ist ein Doppelkomplex und die beiden zugehörigen Spektralsequenzen, die wir in Aufgabe 2 konstruiert haben, liefern nun die gewünschte Spektralsequenz.

Identifizieren Sie die Pfeile $H^n(G/N, H^0(N,M)) \to H^n(G,M)$ und $H^n(G,M) \to H^0(G/N, H^n(N,M))$, deren Existenz aus der Konvergenz der Spektralsequenz folgt, mit bereits bekannten Abbildungen.

(b) Folgern Sie die Existenz der Inflations-Restriktions-Sequenzen aus der Vorlesung indem sie zeigen, dass für eine konvergierende Spektralsequenz $E_2^{p,q} \Rightarrow H^{p+q}$ eine exakte Sequenz

$$0 \to E_2^{1,0} \to H^1 \to E_2^{0,1} \to E_2^{2,0} \to H^2$$

existiert.

Abgabe am Donnerstag, den 30. 1. 2014 in der Übung.

[2] Warum?