Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Fabian Januszewski
Dipl.-Inform. Tobias Columbus

p-adische Modulformen

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 *Die Struktur der Iwasawa-Algebra*
Sei $\mathcal{O}$ der Ganzheitsring einer endlichen Erweiterung von $\mathbf{Q}_p$. Sei $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}$ das maximale Ideal.

(a) Sei $g = \sum a_i T^i \in \mathcal{O}[[T]]$ eine Potenzreihe mit der Eigenschaft, dass $a_i \in \mathfrak{p}$ für alle $0 \leq i < d$ und $a_d \notin \mathfrak{p}$. Zeigen Sie, dass sich jede Potenzreihe $f \in \mathcal{O}[[T]]$ eindeutig als $f = qg + r$ mit einer Potenzreihe $q \in \mathcal{O}[[T]]$ und einem Polynom $r \in \mathcal{O}[T]$ von Grad $\deg(r) < d$ schreiben lässt.

(b) Sei wieder $g = \sum a_i T^i \in \mathcal{O}[[T]]$ eine Potenzreihe mit $a_i \in \mathfrak{p}$ für alle $0 \leq i < d$ und $a_d \notin \mathfrak{p}$. Zeigen Sie, dass sich g eindeutig als Produkt $g = up$ aus einer Einheit $u \in \mathcal{O}[[T]]^\times$ und einem normierten Polyom $p = \sum b_i T^i$ von Grad d mit $b_i \in \mathfrak{p}$ für alle $0 \leq i < d$ zerlegen lässt.

Sei nun Γ eine multiplikative topologische Gruppe und $\Gamma \cong \mathbf{Z}_p$ ein Isomorphismus. Sei $\Gamma_n = \Gamma/\Gamma^{p^n}$ und $\mathcal{O}[[\Gamma]] = \lim \mathcal{O}[\Gamma_n]$.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}[\Gamma_n] \cong \mathcal{O}[T]/\big((1+T)^{p^n} - 1\big)$.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}[[T]] \cong \lim \mathcal{O}[T]/\big((1+T)^{p^n} - 1\big)$ und folgern Sie, dass $\mathcal{O}[[\Gamma]] \cong \mathcal{O}[[T]]$.

Aufgabe 2 *Charaktere und die Iwasawa-Algebra*
Wie in Aufgabe 1 sei $\mathcal{O}$ der Ganzheitsring einer endlichen Erweiterung von $\mathbf{Q}_p$ und $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}$ das maximale Ideal. Weiterhin sei Γ eine multiplikative topologische Gruppe und $\Gamma \cong \mathbf{Z}_p$ ein Isomorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}[[\Gamma]]$ die folgende universelle Eigenschaft besitzt: Zu jeder pro-endlichen $\mathcal{O}$-Algebra A und jedem stetigen Homomorphismus $\chi\colon \Gamma \to A^\times$ gibt es genau einen stetigen Homomorphismus $\chi^\flat\colon \mathcal{O}[[\Gamma]] \to A$, der χ fortsetzt.

(b) Jeder Charakter $\chi\colon \Gamma \to \mathcal{O}^\times$ induziert gemäß Teil (a) einen Homomorphismus $\chi^\flat\colon \mathcal{O}[[\Gamma]] \to \mathcal{O}$. Zeigen Sie, dass $\{\ker \chi^\flat \mid \chi \in \hom(\Gamma, \mathcal{O}^\times) \text{ ist von endlicher Ordnung}\}$ dicht in $\operatorname{Spec} \mathcal{O}[[\Gamma]]$ ist.

Abgabe am Donnerstag, den 6. 2. 2014 in der Übung.