Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Fabian Januszewski
Dipl.-Inform. Tobias Columbus

p-adische Modulformen
Übungsblatt 3

Aufgabe 1 *Geometrie projektiver Räume*
Sei $n \geq 1$ und k ein unitärer kommutativer Ring. Für eine k-Algebra A sei $\mathbb{P}^n_k(A)$ die Menge der direkten Summanden von A^{n+1} von Rang n. Weiter sei für einen Pfeil $f\colon A \to B$ in k–Alg die Abbildung $\mathbb{P}^n_k(f)\colon \mathbb{P}^n_k(A) \to \mathbb{P}^n_k(B)$ durch

$$A^{n+1} \supseteq V \longmapsto B \otimes_A V \subseteq B^{n+1}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass die Zuordnungen $A \mapsto \mathbb{P}^n_k(A)$ und $f \mapsto \mathbb{P}^n_k(f)$ einen Funktor $\mathbb{P}^n_k\colon k\text{–Alg} \to \text{Set}$ definieren.

(b) Sei nun $L \subseteq k^{n+1}$ ein direkter Summand von Rang 1. Sei $U_L(A) \subseteq \mathbb{P}^n_k$ die Menge der $W \subseteq A^{n+1}$ mit $W \oplus (A \otimes_k L) = A^{n+1}$. Zeigen Sie, dass U_L ein wohldefinierter Unterfunktor von $\mathbb{P}^n_k$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass U_L isomorph zu $\mathbb{A}^n_k = \operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n]$ ist.

Sei nun k ein Körper. Wir nennen einen Unterfunktor $X \subseteq \mathbb{P}^n_k$ abgeschlossen, falls der Schnitt von X mit allen U_L abgeschlossen ist.

(d) Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $Y \subseteq \mathbb{P}^1_k(k)$ entweder bereits abgeschlossen ist oder $\overline{Y} = \mathbb{P}^1_k(k)$ gilt.

Aufgabe 2 *Operationen von affinen Gruppen auf $\mathbb{P}^1_k$*
Sei k ein Körper und G eine affine Gruppe über k. Weiter operiere G auf $\mathbb{P}^1_k$.

(a) Zeigen Sie, dass der Zariski-Abschluss einer Bahn $G(k)x$ eines Punktes $x \in \mathbb{P}^1_k(k)$ ebenfalls invariant unter $G(k)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede Bahn $G(k)x$ offen in ihrem Abschluss ist.

(c) Folgern Sie, dass es eine abgeschlossene Bahn $G(k)x$ gibt.

Die Aussage aus Teilaufgabe (c) gilt auch viel allgemeiner, ist dann aber nicht mehr so einfach zu zeigen.

Aufgabe 3 *Borel-Untergruppen*
Sei k ein Körper. Zeigen Sie, dass die k-wertigen Punkte einer jeden auflösbaren, zusammenhängenden und abgeschlossenen Untergruppe der SL_2 konjugiert zu den k-wertigen Punkten einer Untergruppe von oberen Dreiecksmatrizen in SL_2 ist.

Sie können die folgenden zwei Aussagen ohne Beweis verwenden:

(i) Ist G eine abgeschlossene zusammenhängende affine Gruppe, so ist $[G, G]$ eine abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe.

(ii) Ist G affin und zusammenhängend und N ein abgeschlossener Normalteiler von G, so ist G/N eine affine zusammenhängende Gruppe.

Falls sich irgendwie Platz und Zeit findet, zeigen wir vielleicht wenigstens Aussage (ii) auf einem der folgenden Übungsblätter.

Aufgabe 4 *Der $\mathbb{P}^1_k$ als Quotient der* SL_2
Sei k ein unitärer kommutativer Ring. Weiter sei SL_2 die spezielle lineare Gruppe über k und $B \subseteq \mathrm{SL}_2$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen in SL_2. Zeigen Sie, dass der Funktor $(\mathrm{SL}_2/B) \colon k\text{–Alg} \to \mathrm{Set}$ mit

$$(\mathrm{SL}_2/B)(A) = \mathrm{SL}_2(A)/B(A)$$

isomorph zu $\mathbb{P}^1_k$ ist.

Abgabe am Donnerstag, den 14. 11. 2013 in der Übung.