Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Fabian Januszewski
Dipl.-Inform. Tobias Columbus

p-adische Modulformen

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 *Die Operation von* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ *auf der oberen Halbebene*
Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ operiert auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathfrak{Im}(z) > 0\}$ via

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $|cz+d|^2 \cdot \mathfrak{Im}(gz) = \mathfrak{Im}(z)$. Schlussfolgern Sie, dass die Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ auf $\mathbb{H}$ tatsächlich wohldefiniert ist.

(b) Setzen Sie die Operation auf $\mathbb{H}$ zu einer Operation auf $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbf{Q} \cup \{\infty\}$ fort.

Sei nun

$$F = \left\{ z \in \overline{\mathbb{H}} \;\middle|\; -\frac{1}{2} \leq \mathfrak{Re}(z) < \frac{1}{2} \text{ und } |z| > 1 \text{ oder } -\frac{1}{2} \leq \mathfrak{Re}(z) \leq 0 \text{ und } |z| = 1 \right\}$$

und

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

seien fest gewählt.

(c) Skizzieren Sie $\mathbb{H}$, F und gF für $g \in \{S, T, ST, ST^{-1}, STS\}$.

(d) Finden Sie Elemente g_2 und g_3 in $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ von Ordnung 2 bzw. 3.

(e) Zeigen Sie, dass es für jedes $z \in \overline{\mathbb{H}}$ ein Element $g \in \langle S, T \rangle \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ gibt, so dass $gz \in F$.

(f) Zeigen Sie, dass es keine zwei verschiedenen Punkte $z_1, z_2 \in F$ mit $z_1 = gz_2$ für ein $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ gibt.

(g) Berechnen Sie die Stabilisatoren aller Punkte $z \in F$.

(h) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ bereits von S und T erzeugt wird.

Aufgabe 2 *Quotienten der oberen Halbebene*
Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ eine Untergruppe von endlichem Index.

(a) Zeigen Sie, dass $\Gamma\backslash\overline{\mathbb{H}}$ nur endlich viele Punkte enthält, die nicht auch in $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ liegen.

(b) Zeigen Sie, dass die Quotiententopologie auf $\Gamma\backslash\overline{\mathbb{H}}$ hausdorffsch ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\Gamma\backslash\overline{\mathbb{H}}$ kompakt und zusammenhängend ist.

Abgabe am Donnerstag, den 21. 11. 2013 in der Übung.