Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Fabian Januszewski
Dipl.-Inform. Tobias Columbus

p-adische Modulformen

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 *Zerlegung von $\Gamma_0(N)$-Doppelnebenklassen*
Sei $\Gamma = \Gamma_0(N)$, p eine Primzahl und $r \geq 0$ eine ganze Zahl. Weiter sei

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^r \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $\beta \in \Gamma\alpha\Gamma$ ein $\gamma \in \Gamma$ existiert, so dass $\gamma\beta$ von der Form

$$\gamma\beta = \begin{pmatrix} p^{r-s} & m \\ 0 & p^s \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq m < p^s$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Schnitt der Nebenklassen

$$\Gamma \begin{pmatrix} p^{r-s} & m \\ 0 & p^s \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Gamma \begin{pmatrix} p^{r-t} & n \\ 0 & p^t \end{pmatrix}$$

nur für $s = t$ nicht leer ist.

(c) Zeigen Sie, dass

$$\Gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^r \end{pmatrix} \Gamma = \begin{cases} \displaystyle\coprod_{m=0}^{p^r-1} \Gamma \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & p^r \end{pmatrix} & \text{falls } p \mid N, \\[2em] \displaystyle\coprod_{s=0}^{r} \coprod_{\substack{m=0 \\ \gcd(m,p^r,p^{r-s})=1}}^{p^s-1} \Gamma \begin{pmatrix} p^{r-s} & m \\ 0 & p^s \end{pmatrix} & \text{falls } p \nmid N. \end{cases}$$

(d) Schlussfolgern Sie, dass

$$\deg T(1,p^r) = \begin{cases} p^r & \text{falls } p \mid N, \\ p^r + p^{r-1} & \text{falls } p \nmid N. \end{cases}$$

Aufgabe 2 *Gitter, Funktionen und Hecke-Operatoren*
Es bezeichne $\mathscr{L}$ die Menge der Gitter in $\mathbf{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass für ein festes $L = \mathbf{Z}z_1 \oplus \mathbf{Z}z_2 \in \mathscr{L}$ die Menge der $K \subseteq L$ mit $(L : K) = n$ in Bijektion zu der Menge

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid ad = n, a \geq 1 \text{ und } 0 \leq b < d\right\}$$

steht und somit insbesondere endlich ist.

(b) Seien $m, n \geq 1$ ganz mit $\gcd(m, n) = 1$. Zeigen Sie, dass für Gitter $M \subseteq L$ mit $(L : M) = mn$ ein eindeutiges Gitter K mit $M \subseteq K \subseteq L$ und $(K : M) = m$ und $(L : K) = n$ existiert.

Sei nun P die Menge der Paare $(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$ mit $\mathfrak{Im}(z_1/z_2) > 0$. Einem Punkt $(z_1, z_2) \in P$ ordnen wir das Gitter $L(z_1, z_2) = \mathbf{Z}z_1 \oplus \mathbf{Z}z_2$ zu. Des Weiteren operiere $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ auf P via

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(z_1, z_2) = (az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2).$$

(c) Zeigen Sie, dass zwei Punkte aus P genau dann dasselbe Gitter in $\mathbf{C}$ definieren, wenn sie in derselben $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$-Bahn liegen.

Vermöge der Vorschrift $\lambda(z_1, z_2) = (\lambda z_1, \lambda z_2)$ operiere nun außerdem $\mathbf{C}^*$ auf $\mathscr{L}$.

(d) Zeigen Sie, dass die Abbildung $(z_1, z_2) \mapsto z_1/z_2$ eine Bijektion zwischen den Mengen $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})\backslash\mathbb{H}$ und $\mathbf{C}^*\backslash\mathscr{L}$ induziert.

(e) Zeigen Sie, dass für jedes

$$F \in \mathcal{M}^k_{\mathscr{L}} = \left\{F : \mathscr{L} \to \mathbf{C} \mid F(\lambda L) = \lambda^{-2k}F(L) \text{ für alle } \lambda \in \mathbf{C}^* \text{ und alle } L \in \mathscr{L}\right\}$$

ein

$$f \in \mathcal{M}^k_{\mathbb{H}} = \left\{f : \mathbb{H} \to \mathbf{C} \;\middle|\; f(gz) = (cz + d)^{2k}f(z) \text{ für alle } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \text{ und alle } z \in \mathbb{H}\right\}$$

mit $F(L(z_1, z_2)) = z_2^{-2k}f(z_1/z_2)$ existiert und dass umgekehrt ein jedes $f \in \mathcal{M}^k_{\mathbb{H}}$ ein $F \in \mathcal{M}^k_{\mathscr{L}}$ definiert.

Sei nun E der freie $\mathbf{Z}$-Modul über $\mathscr{L}$. Für eine ganze Zahl $n \geq 1$ definieren wir durch

$$T(n)L = \sum_{(L:K)=n} K$$

Operatoren $T(n)$ auf E.

(f) Nutzen Sie die Korrespondenz aus Teilaufgabe (e) um eine Operation der $T(n)$ auf $\mathcal{M}^k_{\mathbb{H}}$ zu konstruieren. Machen Sie diese Operation mit Hilfe von Teilaufgabe (a) so explizit wie möglich.

(g) Zeigen Sie, dass $T(mn) = T(m)T(n)$ für alle $m, n \geq 1$ mit $\gcd(m, n) = 1$.

Diese Aufgabe sollte eigentlich noch umfassender sein. Leider ist kein Platz mehr auf dem Übungsblatt und auch sicherlich keine Zeit mehr in der Übung.

Abgabe am Donnerstag, den 28. 11. 2013 in der Übung.