Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Fabian Januszewski
Dipl.-Inform. Tobias Columbus

p-adische Modulformen

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 *Kohomologie von zyklischen Gruppen*
Sei R ein unitärer und kommutativer Ring. Weiter sei $n \geq 1$ und C_n die zyklische Gruppe von Ordnung n. Schließlich sei $\sigma \in C_n$ ein Erzeuger und $N = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i$. Zeigen Sie, dass die Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\sigma - 1} R[C_n] \xrightarrow{N} R[C_n] \xrightarrow{\sigma - 1} R[C_n] \xrightarrow{N} R \longrightarrow 0$$

exakt ist. Benutzen Sie diese Aussage zur Berechnung der Kohomologie $\mathrm{H}^*(C_n, A)$ von C_n mit Koeffizienten in einem beliebigen C_n-Modul A. Was erhalten Sie für den Fall $R = A = \mathbf{Z}$?

Aufgabe 2 *Die Bar-Auflösung und eine explizite Beschreibung von* H^1
Sei G eine Gruppe und B_n der freie $\mathbf{Z}[G]$-Modul mit Basis

$$\{\, [g_1 | \ldots | g_n] \mid g_i \in G \setminus \{1\} \,\}.$$

Für $0 \leq i \leq n$ definiere Abbildungen $d_i \colon B_n \to B_{n-1}$ durch

$$d_0([g_1 | \ldots | g_n]) = g_1 [g_2 | \ldots | g_n],$$
$$d_i([g_1 | \ldots | g_n]) = \begin{cases} [g_1 | \ldots | g_i g_{i+1} | \ldots | g_n] & \text{falls } g_i g_{i+1} \neq 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$d_n([g_1 | \ldots | g_n]) = [g_1 | \ldots | g_{n-1}].$$

Schließlich definiere $d \colon B_n \to B_{n-1}$ durch $d = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$.

(a) Identifizieren Sie (B_*, d) mit einem Quotienten der Standardauflösung (C_*, d) von $\mathbf{Z}$ und zeigen Sie so, dass (B_*, d) ebenfalls eine freie Auflösung von $\mathbf{Z}$ ist.

(b) Sei A ein G-Linksmodul. Eine Derivation D von G in A ist eine Abbildung $D \colon G \to A$ von Mengen mit der Eigenschaft, dass $D(gh) = gD(h) + D(g)$ für alle $g, h \in G$. Die Derivationen mit der offensichtlichen Addition bilden eine Gruppe, die wir mit $\mathrm{Der}(G, A)$ bezeichnen. Die Menge der Derivationen $D \colon G \to A$ mit $D(g) = ga - a$ für ein festes $a \in A$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Der}(G, A)$, die wir mit $\mathrm{Der}^0(G, A)$ bezeichnen. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{H}^1(G, A) \cong \frac{\mathrm{Der}(G, A)}{\mathrm{Der}^0(G, A)}.$$

Aufgabe 3 *Eine explizite Beschreibung von* H^2
Seien G eine Gruppe und A ein $\mathbf{Z}[G]$-Modul. Eine Erweiterung von G durch A ist eine kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow E \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$$

von Gruppen, so dass die von der exakten Sequenz induzierte Operation von G auf A mit der gegebenen Operation übereinstimmt. Für eine solche Erweiterung E von G nennen wir eine Abbildung $s\colon G \to E$ von Mengen mit $s(1) = 1$ und $ps = 1$ einen Schnitt von E. Für einen gegebenen Schnitt s von E definieren wir

$$[g,h]_s = s(g)s(h)s(gh)^{-1}.$$

Außerdem bezeichne B_* erneut die Bar-Auflösung von $\mathbf{Z}$ aus Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass für eine Erweiterung E von G durch A und einen Schnitt s von E die Abbildung $[-,-]_s\colon G \times G \to A$ einen 2-Kozykel in $\mathrm{Hom}(B_2, A)$ induziert.

Zeigen Sie umgekehrt, dass für einen G-Modul A jeder 2-Kozykel in $\mathrm{Hom}(B_2, A)$ von einer Erweiterung E von G durch A und einen Schnitt s induziert wird.

Hinweis: Betrachten Sie für einen 2-Kozykel c die Verknüpfung

$$(a,g)(b,h) = (a + gb + c(g,h), gh)$$

auf $A \times G$.

(b) Seien E_1 und E_2 Erweiterungen von G durch A und es seien Schnitte s_1 und s_2 von E_1 bzw. E_2 gegeben. Weiterhin sei $[-,-]_{s_1} = [-,-]_{s_2}$. Zeigen Sie, dass es dann einen Isomorphismus $\phi\colon E_1 \to E_2$ gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\
& & \downarrow{\scriptstyle 1_A} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle 1_G} & & \\
1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

kommutiert, d.h. so dass die Erweiterungen E_1 und E_2 isomorph sind.

(c) Sei E eine Erweiterung von G durch A und es seien s_1 und s_2 zwei Schnitte von E. Zeigen Sie, dass es eine Abbildung $c\colon G \to A$ mit $c(1) = 1$ und

$$[g,h]_{s_1} - [g,h]_{s_2} = c(g) - c(gh) + gc(h)$$

gibt.

(d) Schließen Sie, dass $\mathrm{H}^2(G, A)$ in Bijektion zu den Isomorphieklassen von Erweiterungen von G durch A steht.

Abgabe am Donnerstag, den 5. 12. 2013 in der Übung.