Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Fabian Januszewski
Dipl.-Inform. Tobias Columbus

p-adische Modulformen

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 *Transfer und Restriktion*
Seien R ein unitärer und kommutativer Ring, G eine Gruppe und $K \subseteq G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Weiter bezeichne $\rho\colon K \to G$ die Inklusion. Alle G- bzw. K-Moduln seien Moduln über $R[G]$ bzw.$R[K]$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{tr} \circ \mathrm{res}^G_K$ auf $\mathrm{H}^*(G, A)$ durch Multiplikation mit $[G : K]$ gegeben ist. Schlussfolgern Sie, dass res^G_K injektiv ist, falls $[G : K]$ invertierbar in R ist.

(b) Sei nun G endlich von Ordnung n. Zeigen Sie, dass für $q \geq 1$ Multiplikation mit n auf $\mathrm{H}^q(G, A)$ die Nullabbildung ist.

(c) Berechnen Sie für einen G-Modul A das Bild ε_A von $1_{\rho^\# A}$ unter der Adjunktion

$$\mathrm{Hom}_K(\rho^\# A, \rho^\# A) \cong \mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}^G_K(\rho^\# A), A)$$

und zeigen Sie, dass der Transfer $\mathrm{tr}\colon \mathrm{H}^*(K, \rho^\# A) \to \mathrm{H}^*(G, A)$ aus der Vorlesung mit der Komposition

$$\mathrm{H}^*(K, \rho^\# A) \xrightarrow{\text{Shapiros Lemma}} \mathrm{H}^*(G, \mathrm{ind}^G_K(\rho^\# A)) \xrightarrow{\varepsilon_A} \mathrm{H}^*(G, A)$$

übereinstimmt.

Aufgabe 2 *Dimensionsverschiebung, freie Produkte und die Kohomologie von* $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$
Sei G eine Gruppe und $\mathfrak{I}_G$ bezeichne das Augmentationsideal.

(a) Sei (Q_*, d_*) eine freie Auflösung von $\mathfrak{I}_G$.[1] Zeigen Sie, dass für $q \geq 2$ die Kohomologie $\mathrm{H}^q(G, A)$ isomorph zur $(q-1)$-ten Kohomologie des Komplexes

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(Q_2, A) \xrightarrow{d^1} \mathrm{Hom}_G(Q_1, A) \xrightarrow{d^0} \mathrm{Hom}_G(Q_0, A) \longrightarrow 0$$

ist.

Seien nun zwei Gruppen G und K gegeben. Wir bezeichnen mit $G * K$ ihr freies Produkt und mit $j_G\colon G \to G * K$ und $j_K\colon K \to G * K$ die natürlichen Inklusionen.

(b) Sei $\Lambda = R[G * K]$ und seien $\mathfrak{I}_{G*K}$, $\mathfrak{I}_G$ und $\mathfrak{I}_K$ die Augmentationsideale in Λ, $R[G]$ und $R[K]$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{I}_{G*K}$ in

$$\mathfrak{I}_{G*K} = (\mathfrak{I}_G \otimes_G \Lambda) \oplus (\Lambda \otimes_K \mathfrak{I}_K)$$

zerfällt.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{H}^q(G * K, A) = \mathrm{H}^q(G, j_G^\# A) \oplus \mathrm{H}^q(K, j_K^\# A)$.

(d) Berechnen Sie $\mathrm{H}^*(\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}), A)$ für einen $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})$-Modul A. Benutzen Sie dazu Teilaufgabe (c) und erinnern Sie sich an Aufgabe 1 auf Blatt 4 sowie an Aufgabe 1 auf Blatt 6.

[1] Eine solche Auflösung gibt es stets. Warum?

Aufgabe 3 *Topologische Kohomologie und Gruppenkohomologie*
Sei X ein Simplizialkomplex[2] und A eine abelsche Gruppe. Weiter seien $C_n(X) = \mathbf{Z}[X_n]$ die freie abelsche Gruppe über den n-Simplizes von X und $d_n\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ sei gegeben durch

$$d_n([x_1, \dots, x_n]) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i [x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n].$$

(a) Zeigen Sie, dass $(C^*(X), d^*) = (\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(C_*(X), A), d^*)$ mit $d^n(f) = f \circ d_n$ ein Kettenkomplex von abelschen Gruppen ist.

Sei nun G eine Gruppe und X sei mit einer simplizialen Aktion $G \curvearrowright X$ ausgestattet. In diesem Fall lässt sich der Quotient $G\backslash X$ mit einer kanonischen simplizialen Struktur versehen.

(b) Zeigen Sie, dass die Aktion von G auf die Komplexe $C_*(X)$ und $C^*(X)$ absteigt.

(c) Die Aktion von G auf X sei nun frei auf der Menge der n-Simplizes, $n \geq 0$, und X sei kontrahierbar. Zeigen Sie, dass $\mathrm{H}^*(G\backslash X, A) = \mathrm{H}^*(G, A)$, wobei $\mathrm{H}^*(X, A)$ die Kohomologie von (C^*, d^*) bezeichne und A als G-Modul mit trivialer G-Aktion versehen sei.

(d) Sei $N \geq 4$. Konstruieren Sie eine simpliziale Struktur auf $\mathbb{H}$, so dass $\Gamma = \Gamma(N)$ simplizial und frei auf der Menge der n-Simplizes, $n \geq 0$ operiert. Schlussfolgern Sie, dass $\mathrm{H}^*(\Gamma, A) = \mathrm{H}^*(\Gamma\backslash\mathbb{H}, A)$ und berechnen Sie $\mathrm{H}^*(\Gamma, A)$ für ein N ihrer Wahl.

Literatur

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. URL: `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf`.

Abgabe am Donnerstag, den 12. 12. 2013 in der Übung.

[2] Wer den Begriff nicht kennt, der lese zum Beispiel den ersten Abschnitt von Kapitel 2 in [Hat02]. Wir sind hier absichtlich etwas ungenau und erlauben, dass Simplizes nicht eindeutig durch ihre Eckenmenge festgelegt sind.