Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Fabian Januszewski
Dipl.-Inform. Tobias Columbus

p-adische Modulformen

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 *Galois-Abstieg, Teil 2*
Sei k ein Körper und sei $l \mid k$ eine Galois-Erweiterung mit Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(l \mid k)$. Im Folgenden sei G stets mit der Krull-Topologie versehen.

(a) Sei A eine l-Algebra. Wir versehen die Algebren-Isomorphismen $\mathrm{Aut}(A)$ mit der Struktur eines nichtkommutativen[1] G-Moduls via

$$^{\sigma}f(a) = \sigma f(\sigma^{-1}a)\,.$$

Eine *k-Form* von A ist eine k-Unteralgebra $B \subseteq A$, so dass die natürliche Abbildung $l \otimes_k B \to A$ ein Isomorphismus von l-Algebren ist. Zeigen Sie, dass die Menge der k-Formen von A in Bijektion zur stetigen Kohomologie $\mathrm{H}^1(G, \mathrm{Aut}(A))$ steht[2].

(b) Geben Sie mindestens zwei verschiedene reelle Formen der komplexen 2×2-Matrizen $M_2(\mathbf{C})$ explizit an.

(c) Nun sei l ein algebraische Abschluss von k und $\mu_m \subseteq l$ sei die Gruppe der m-ten Einheitswurzeln. Übersetzen Sie Hilberts Satz 90 in das Verschwinden der Kohomologie $\mathrm{H}^1(G, l^\times)$. Benutzen Sie diese Übersetzung, um einen Isomorphismus

$$\frac{k^\times}{\{a^m \mid a \in k^\times\}} \cong \mathrm{H}^1(G, \mu_m)$$

zu erhalten und schlussfolgern Sie, dass für $\mu_m \subseteq k$ jede abelsche Erweiterung von k deren Galoisgruppe Exponent m hat eine Erweiterung der Form $k(\sqrt[m]{a})$ ist.

Aufgabe 2 *Kohomologie zyklischer Gruppen, Teil 2*
Sei Γ eine unendliche zyklische Gruppe. Zeigen Sie, dass $\mathrm{H}^q(\Gamma, A) = 0$ für $q \geq 2$.

Abgabe am Donnerstag, den 9. 1. 2014 in der Übung.

[1] $\mathrm{Aut}(A)$ ist eine nicht notwendigerweise kommutative Gruppe.
[2] Definieren Sie für eine nichtkommutative Gruppe A mit einer kompatiblen G-Aktion die Mengen der Kozykel und Ränder als Mengen von denjenigen Abbildungen $G \to M$, die die entsprechenden Bedingungen aus dem Standard- oder Bar-Komplex erfüllen.