Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Fabian Januszewski
Dipl.-Inform. Tobias Columbus

p-adische Modulformen
Übungsblatt 9

Aufgabe 1 *Relative Hecke-Operatoren*
Seien Γ und Γ' zwei Kongruenzuntergruppen von $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ und sei $\Delta = \{\alpha \in \mathrm{M}_2(\mathbf{Z}) \mid \det(\alpha) \neq 0\}$. Weiterhin sei M ein Δ-Modul.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $\delta \in \Delta$ eine endliche Zerlegung $\Gamma\delta\Gamma' = \coprod \Gamma\alpha_i$ existiert.

(b) Nutzen Sie die Zerlegung aus Teilaufgabe (a) um die Definition der Hecke-Operatoren aus der Vorlesung zu einer Definition von relativen Hecke-Operatoren $[\Gamma\delta\Gamma'] \colon \mathrm{H}^*(\Gamma, M) \to \mathrm{H}^*(\Gamma', M)$ auf der Kohomologie von Γ bzw. Γ' zu verallgemeinern.

(c) Steigt Ihre Definition von $[\Gamma\delta\Gamma']$ auf die parabolische Kohomologie $\mathrm{H}^q_P(\Gamma', M)$ bzw. $\mathrm{H}^q_P(\Gamma, M)$ für $q \in \{1, 2\}$ ab?

(d) Seien $G = \delta\Gamma'\delta^{-1} \cap \Gamma$ und $G^\delta = \Gamma' \cap \delta^{-1}\Gamma\delta$. Zeigen Sie, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^*(\Gamma, M) \arrow[r, "\mathrm{res}^\Gamma_G"] \arrow[d, "{[\Gamma\delta\Gamma']}"'] & \mathrm{H}^*(G, M) \arrow[d, "\text{Konjugation mit } \delta"] \\
\mathrm{H}^*(\Gamma', M) & \mathrm{H}^*(G^\delta, M) \arrow[l, "\mathrm{tr}^{\Gamma'}_{G^\delta}"]
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Zeigen Sie darüber hinaus, dass die Konjugation mit δ bzw. die Transfer-Abbildung $\mathrm{tr}^{\Gamma'}_{G^\delta}$ nichts anderes als die relativen Hecke-Operatoren $[G\delta G^\delta]$ bzw. $[\Gamma' E_2 G^\delta]$ sind. Dabei bezeichne E_2 die 2×2-Einheitsmatrix.

Aufgabe 2 *Eisenstein-Reihen*

Sei $k \geq 2$ gerade. In dieser und der folgenden Aufgabe betrachten wir die Eisenstein-Reihen

$$E'_k(z) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} (mz+n)^{-k}$$

und $E_k(z) = \omega^{-1} E'_k(z)$ für

$$\omega = \frac{2(2\pi \mathrm{i})^k}{(k-1)!}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $E'_k(z)$ für $z \in \mathbb{H}$ absolut konvergent ist und folgern Sie, dass E'_k die automorphe Relation $E'_k(\gamma z) = (cz+d)^k E'_k(z)$ für alle $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass für $q = e^{2\pi i z}$

$$E'_k(z) = 2\zeta(k) + \omega \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n,$$

wobei $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$. Nutzen Sie dafür die Entwicklung

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right)$$

des Kotangens.

(c) Zeigen Sie, dass die Eisenstein-Reihen E_k Hecke-Eigenformen sind und geben Sie die Eigenwerte an. *Hinweis:* Erinnern Sie sich an Aufgabe 2 auf Blatt 5.

Abgabe am Donnerstag, den 16. 1. 2014 in der Übung.