Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

Proseminar: p-adische Zahlen im Sommersemester 2014

Das Seminar findet jeden Mittwoch von 11:30-13:00 im Raum 1C-01 des Allianzgebäudes statt.

Vortragsthemen sind folgende:

Vortrag 1: Bewertete Körper

Definition eines bewerteten Körpers, elementare Eigenschaften der archimedischen und nicht-archimedischen Bewertungen [2, §1.2], [1, 2.1 und 2.2], [4, §2].

Vortrag 2: Nicht-archimedische Geometrie
Dreiecke, offene und abgeschlossene Kreise, Durchschnitt von Kreisen [1, 2.3], [4, §3].

Vortrag 3: Topologischer Exkurs

Topologische Räume, Produkttopologie, projektiver Limes und dessen Topologie, (lokale) Kompaktheit, Umgebungsbasis. Siehe z. B. [5], [6].

Vortrag 4: Bewertungsringe

Der nichtarchimedische Einheitskreis ist ein Ring und hat genau ein maximales Ideal. Definition des Restklassenkörpers [1, 2.4], [4, §4].

Vortrag 5: Satz von Ostrowski

Beträge auf $\mathbb{Q}$, Äquivalenz von Beträgen, Satz von Ostrowski [1, 3.1], [4, §5].

Vortrag 6: Vervollständigung

Ring der Cauchy-Folgen, Ideal der Nullfolgen, Restklassenkörper [1, 3.2], [4, §6].

Vortrag 7 + 8: Struktur von $\mathbb{Q}_p$

Definition von $\mathbb{Q}_p$ als Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bzgl. $|\cdot|_p$, Definition von $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{N}$ liegt dicht in $\mathbb{Z}_p$; Restklassenringe mod p^n. Kompaktheit von $\mathbb{Z}_p$ und lokale Kompaktheit von $\mathbb{Q}_p$; Einbettung von $\mathbb{Z}_p$ in das Produkt von $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, Darstellung p-adischer Zahlen als kohärente Folgen und durch p-adische Entwicklung; Einheiten in $\mathbb{Z}_p$. Siehe [1, 3.3], [4, §7].

Vortrag 9 + 10: Das Henselsche Lemma

Ein Polynom in $\mathbb{Z}_p[X]$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{Z}_p$, wenn es in $\mathbb{F}_p$ eine einfache Nullstelle hat. Einheitswurzeln in $\mathbb{Q}_p$, Quadrate in $\mathbb{Q}_p$. Allgemeine Form des Henselschen Lemmas. Siehe [1, 3.4], [4, §8].

Vortrag 11: Folgen und Reihen

Konvergenzeigenschaften von Folgen und Reihen in $\mathbb{Q}_p$ [2, §3.1], [1, 4.1, 4.2].

Vortrag 12: p-adische Potenzreihen

Konvergenzkriterium für Reihen, Konvergenzradios von Potenzreihen [2, 3.2], [1, 4.2, 4.3], [4, §9].

Vortrag 13: p-adische Exponentialfunktion und p-adischer Logarithmus

Definition der p-adischen Exponentialfunktion und des p-adischen Logarithmus, Konvergenzgebiete; Stetigkeit von p-adischer Exponentialfunktion und p-adiarticleschem Logarithmus und gegenseitiges Inverses; Beschreibung von $\mathbb{Q}_p^\times$ unter Verwendung des p-adischen Logarithmus. Siehe [2, 3.3, 3.4], [1, 4.5], [3, Satz II.5.3 und 5.5]

Literatur:

[1] Gouvêa: p-adic Numbers, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1993
[2] Katok: p-adic Analysis Compared with Real, AMS, 2007
[3] Neukirch: Algebraische Zahlentheorie, Springer
[4] Werner: Nicht-archimedische Zahlen, Vorlesung Frankfurt, 2012
[5] Dieck: Topologie, de Gruyter Lehrbuch, Walter de Gruyter and Co., Berlin, 1991
[6] Jänich: Topologie, Springer, 1980