Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Fabian Januszewski

Die Riemannsche ζ-Funktion

Vorlesung im Sommersemester 2016

Das Studium der Riemannschen ζ-Funktion geht auf Leonhard Eulers fundamentale Arbeiten im 18. Jahrhundert zurück. Euler beschäftigte sich seiner Zeit mit dem sogenannten *Basel-Problem*, welches die Mathematiker seiner Zeit zuvor fast ein Jahrhundert lang ohne Erfolg bearbeitet hatten. Es stellt die Frage, welchen Wert die Summe der Kehrwerte aller Quadrate annimmt. In moderner Sprache ist dies die Frage, welchen Wert die absolut konvergente Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \;=\; 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$$

annimmt. Eulers berühmte Antwort auf diese Frage lautet:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \;=\; \frac{\pi^2}{6}. \tag{1}$$

Die Mathematiker aus Eulers Zeit waren von dieser Lösung sehr überrascht, da niemand das Auftreten der Kreiszahl π vorhergesehen hatte. Scheinbar eng verwandte Reihen wie

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} \;&=\; \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots\\ &=\; 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots\\ &=\; 1\end{aligned}$$

waren schon lange bekannt und nahmen stets *rationale Werte* an.

Allgemeiner studierte Euler für $s>1$ die Reihe

$$\zeta(s) \;:=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \tag{2}$$

und wertete neben $\zeta(2)$ auch $\zeta(2k)$ für ganzes $k\geq 1$ aus.

Bernhard Riemann faßte die reelle Variable 's' Eulers als *komplexe* Variable auf. Die $\zeta(s)$ definierende Reihe (2) konvergiert für $s\in\mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s)>1$ absolut. Riemann zeigte, daß die so definierte Funktion $\zeta(s)$ eine *holomorphe* Fortsetzung auf $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ besitzt. Die Divergenz der harmonischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \;=\; 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots \;=\; \infty$$

spiegelt die Tatsache wider, daß $\zeta(s)$ in $s=1$ einen einfachen Pol besitzt.

Riemann zeigte weiterhin, daß die Funktion $\zeta(s)$ aus $\zeta(1-s)$ gewonnen werden kann. $\zeta(s)$ erfüllt also eine Funktionalgleichung, welche letztendlich das Auftreten von π in Eulers Identität (1) erklärt, denn die a priori durch holomorphe Fortsetzung definierten Werte $\zeta(1-2k)$ für $k\geq 1$ sind erstaunlicherweise *rationale* Zahlen!

Für $k=1$ ergibt sich konkret

$$\zeta(-1) \;=\; -\frac{1}{12}.$$

Diese faszinierende Formel gibt der im klassischen Sinne divergenten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \;=\; 1+2+3+4+\cdots$$

einen formalen Sinn.

Die bereits von Euler entdeckte und nach ihm benannte Produktentwicklung

$$\zeta(s) \;=\; \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \tag{3}$$

für $\mathrm{Re}(s)>1$, ist der Ausgangspunkt für ein enges Zusammenspiel zwischen tiefliegenden zahlentheoretischen Fragestellungen und der Riemannschen ζ-Funktion, welche letztendlich in der *Riemannschen Vermutung* kulminieren, einem der größten bis heute ungelösten Probleme der Mathematik.

Der geneigte Leser möge sich mittels (3) überlegen, weswegen $1/\zeta(2)=\pi^2/6$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß zwei zufällig gewählte natürliche Zahlen teilerfremd sind.

Voraussetzungen: Grundkenntnisse aus der Vorlesung *Funktionentheorie*.
Termin: Donnerstags 11:30-13:00; Übung: zwei-wöchentlich Freitags 14:00-15:30; jeweils in SR 2.59.