SEMINAR „DIE VEECHALTERNATIVE FÜR BILLARDTISCHE“ – SOMMER 2008
EINDEUTIG ERGODISCHE UND MINIMALE DYNAMISCHE SYSTEME

ANDRÉ KAPPES

In diesem Aufschrieb möchte ich die beiden Eigenschaften „Minimalität“ und „eindeutige Ergodizität“ für dynamische Systeme gegenüberstellen, und außerdem meine Behauptung bekräftigen, dass es Beispiele gibt, die zeigen, dass diese Eigenschaften sich nicht gegenseitig implizieren.

In manchen Fällen folgt aus eindeutig ergodisch bereits minimal, z.B. für Translationen auf dem Torus wie Bastian richtig bemerkt hat. Hier ist der allgemeine Satz dazu ([CFS, Seite 42, Corollary]). Der Einfachheit halber sei unser dynamisches System diskret, also gegeben durch eine Homöomorphismus $T : X \to X$, wobei X ein kompakter metrischer Raum sei.

Theorem 1. *Ist* $(X, \{T^k\}_{k\in\mathbb{Z}})$ *eindeutig ergodisch und gilt für das invariante Maß* μ, *dass* $\mu(U) > 0$ *ist für alle* $U \subset X$ *offen, dann ist das dynamische System minimal.*

Proof. Sei $U \subset X$ offen. Dann gilt insbesondere $\mu(U) = \sup \mu(F)$, wobei das Supremum über alle abgeschlossenen Mengen $F \subset U$ gebildet wird. (Das gilt, weil das Maß für einen metrischen Raum regulär ist.) Also finden wir eine abgeschlossene Menge $F_0 \subset U$ von positivem Maß. Weil X ein metrischer Raum ist, existiert (aufgrund den Hausdorff-Eigenschaften eines solchen) eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$, $f \equiv 1$ auf F_0 und $f \equiv 0$ auf $M \setminus U$. Für einen beliebigen Punkt $x_0 \in X$ gilt wegen der Ergodizität von T, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x_0)) = \int_X f d\mu \geq \mu(F_0).$$

Also exisitiert ein n mit $f(T^n(x_0)) > 0$, d.h. $T^n(x_0) \in U$, also ist die Bahn jedes Punktes dicht in X und das dynamische System ist minimal. □

Minimal, aber nicht eindeutig ergodisch

Ein Beispiel für ein dynamisches System, das eindeutig ergodisch, aber nicht minimal ist, findet man in [CFS, Chapt. 5, § 4]. Dieses ist eine

Date: 28. April 2008.

spezielle Interval exchange transformation (was man wohl mit Intervallvertauschung übersetzen könnte). Und weil es sehr nett ist, erkläre ich hier kurz, was eine Interval exchange transformation ist.

Man nehme sein Lieblingsintervall, z.B. $I = [0, 1)$ und wähle sich eine Partition in endlich viele Teilintervalle $I_1, \ldots, I_m$, d.h. $\bigcup I_k = I$ und die I_k sind paarweise disjunkte Intervalle der Form $[a, b)$. Sei l_k die Länge von I_k. Man wähle sich eine Permutation $\pi \in S_m$ und verklebe die Intervalle neu anhand dieser Permutation, d.h.

$$I = [0, l_{\pi(1)}) \cup [l_\pi(1), l_{\pi(1)} + l_{\pi(2)}) \cup \cdots \cup [l_{\pi(1)} + \cdots + l_{\pi(m-1)}, 1).$$

Die Interval exchange transformation $T_\pi : I \to I$ bildet nun ein $x \in I_k \subset I$ auf das y ab, das dem x in der neuen Verklebung der Intervalle entspricht. Allerdings ist die Abbildung $T_\pi : I \to I$ (i.A.) kein Homöomorphismus von I, wegen der Sprungstellen an den Intervallgrenzen (dennoch ist die Frage nach der Minimalität sinnvoll). Interval exchange transformations verallgemeinern übrigens Rotationen von S^1: diese entstehen aus Interval exchange transformations mit 2 Intervallen, die vertauscht werden, wenn wir das Intervall $[0, 1)$ an seinen Grenzen zu einer S^1 verkleben.

Eindeutig ergodisch, aber nicht minimal

Ein Beispiel für ein eindeutig ergodisches, aber nicht minimales dynamsisches System findet man in [W]. Sei $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ und $\Gamma = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$, dann ist Γ eine diskrete Untergruppe von G. Sei $\pi : G \to G/\Gamma$ die Projektion. $H \subset G$ sei die Untergruppe $H = TU$, wobei $U \subset G$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen ist und T die Gruppe der Matrizen

$$\mathrm{diag}(\exp(t), \exp(-\alpha t), \exp((\alpha - 1)t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

ist, wobei α eine festgewählte irrationale Zahl ist. Alle Gruppen, die hier vorkommen, sind sogenannte Liegruppe, d.h. Gruppen, die gleichzeitig ein topologischer Raum und sogar eine differenzierbare Mannigfaltigkeit sind. Die Gruppe H operiert nun auf dem Raum G/Γ durch Linkstranslation, d.h.

$$h \mapsto (g\Gamma \mapsto hg\Gamma)$$

und man kann zeigen, dass diese Operation nicht minimal, aber eindeutig ergodisch ist.

Ähnliche Gruppen von Matrizen werden uns übrigens später noch bei Möbiustransformationen und der hyperbolischen Geometrie begegnen.

Literatur

[CFS] I.P. Cornfeld, S. V. Fomin, Ya. G. Sinai, *Ergodic Theory*, Springer (1982)

[W] Barak Weiss, *Finite-dimensional representations and subgroup actions on homogeneous spaces*, Israel Journal of Mathematics, **106** (1998), 189–207