Die komplexe Halbebene faktorisiert nach einer Fuchsschen Gruppe

Matthias Nagel

1 Riemannsche Flächen

Stets sei X eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit (Fläche).

Definition 1.1 1) Eine **komplexe Karte** auf X ist ein Homöomorphismus $\varphi : U \to V$, $U \subset X$ offen, $V \subset \mathbb{C}$ offen.
$\varphi_i : U_i \to V_i$ $(i = 1, 2)$ heißen **holomorph verträglich** $\Leftrightarrow$ $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ ist konform.

2) Ein **komplexer Atlas** auf X ist ein System $\mathfrak{A} = \{\varphi_i : U_i \to V_i\}_{i \in I}$ mit φ_i paarweise holomorph verträglich und $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.
$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ heißen **analytisch äquivalent** $\Leftrightarrow$ $\forall \varphi \in \mathfrak{A}, \forall \psi \in \mathfrak{A}' : \varphi$ und ψ sind verträglich.

Bemerkung 1.2 „Analytische Äquivalenz“ von Atlanten ist eine Äquivalenzrelation.

Definition 1.3 1) $\Sigma := [\mathfrak{A}]_\sim$ heißt eine **komplexe Struktur** auf X. $\mathfrak{A}^* \in \Sigma$ sei der maximale Atlas, d. h. $\mathfrak{A}^* := \bigcup_{\mathfrak{A} \in \Sigma} \mathfrak{A}$. Schreibweise: An Stelle von Σ wird im Allgemeinen $\mathfrak{A}^*$ oder auch nur $\mathfrak{A}$ für die Struktur geschrieben.

2) Sei X zusammenhängend, $\mathfrak{A}$ ein Atlas und Σ eine komplexe Struktur. Das Paar (X, Σ) bzw. $(X, \mathfrak{A})$ heißt **Riemannsche Fläche (RF)**.

Beispiel 1.4 1) $(\mathbb{C}, \{\mathrm{id}_\mathbb{C}\})$ ist eine RF.

2) Gebiete in $\mathbb{C}$ sind RF.

3) Die Vollebene $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit folgender Topologie: $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ ist offen $\Leftrightarrow$ $U \subset \mathbb{C}$ ist offen, oder $U = V \cup \{\infty\}$ mit $V \subset \mathbb{C}$ und $V^\complement$ kompakt. Definiere folgende Karten:

$$U_1 := \mathbb{C} \qquad \varphi_1(z) = z$$

$$U_2 := \mathbb{C}^\times \cup \{\infty\} \qquad \varphi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \in \mathbb{C}^\times \\ 0, & z = \infty \end{cases}$$

Klar: φ_1, φ_2 sind homöomorph und $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times, z \mapsto \frac{1}{z}$ ist holomorph. φ_1, φ_2 bilden einen Atlas $\Rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ ist RF $\Rightarrow$ Riemannsche Zahlenkugel ist RF.

4) Tori sind RF. Seien $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$, $\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ die kanonische Projektion.

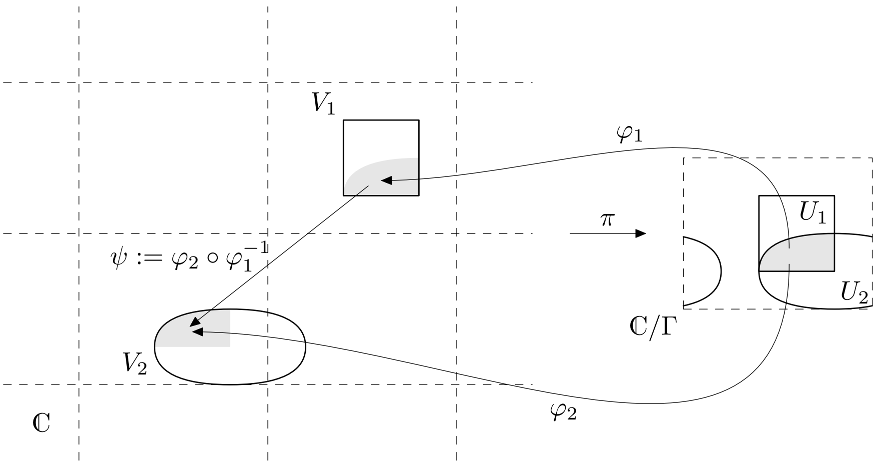
   Definiere folgende Topologie auf $\mathbb{C}/\Gamma$: $U \subset \mathbb{C}/\Gamma$ offen $:\Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}$ offen. Dann ist $\mathbb{C}/\Gamma$ hausdorffsch und π stetig nach Konstruktion.

   $\mathbb{C}/\Gamma$ ist kompakt, da mit $P := \{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 : \lambda, \mu \in [0,1]\}$ gilt: $\pi(P) = \mathbb{C}/\Gamma$ und $P \subset \mathbb{C}$ kompakt. $\mathbb{C}/\Gamma$ ist zusammenhängend, da $\mathbb{C}$ zusammenhängend ist.

   π ist offen. Sei $V \subset \mathbb{C}$ offen. $\pi(V)$ offen $\Leftrightarrow \hat{V} := \pi^{-1}(\pi(V)) \subset \mathbb{C}$ offen. $\hat{V} = \bigcup_{\omega \in \Gamma} (\omega + V)$ ist offen.

   Wir defnieren die Struktur auf $\mathbb{C}/\Gamma$ wie folgt: Sei $V_i \subset \mathbb{C}$ offen, sodass $\pi_{|V_i}$ injektiv und $U_i := \pi(V_i)$. Dann ist $\varphi_i := \pi_{|V_i}^{-1} : U_i \to V_i$ eine Karte auf $\mathbb{C}/\Gamma$. Sei $\mathfrak{A}$ die Menge aller so erzeugbaren φ_i.

   Noch zu zeigen: $\mathfrak{A}$ ist ein Atlas, d. h. $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{A}$ sind holomorph verträglich.



   Betrachte die Abbildung $\psi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$. Zu zeigen: ψ holomorph. Sei $z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2) \Rightarrow \pi(\psi(z)) = \pi\left(\varphi_2\left(\varphi_1^{-1}(z)\right)\right) = \varphi_1^{-1}(z) = \pi(z) \Rightarrow \pi(\psi(z)) - \pi(z) = 0 \Rightarrow \psi(z) - z \in \operatorname{Kern} \pi = \Gamma$. $\psi - \mathrm{id}$ ist stetig, Γ diskret $\Rightarrow \psi(z) = z + c$ mit $c \in C$ konstant auf jeder Zusammenhangskomponente $\Rightarrow \psi$ holomorph.

2 $\mathbb{H}/\Gamma$ als Riemansche Fläsche

In diesem Kapitel sei Γ stets eine Fuchssche Gruppe.

Erinnerung (Vortrag 9)

- Γ operiert auf $\mathbb{H}$ eigentlich diskontinuierlich, d.h. es existiert eine Umgebung U um $p \in \mathbb{H}$, für die gilt: $T(U) \cap U \neq \emptyset$ für nur endlich viele $T \in \Gamma$.

- Spezieller: $\forall\, p \in \mathbb{H}\ \exists\, \varepsilon > 0$:
  - $\forall\, T \in \Gamma_p : T$ ist Isomorphismus von $U_\varepsilon(p)$, insb. $T(U_\varepsilon(p)) = U_\varepsilon(p)$; außerdem $\forall q \in \dot{U}_\varepsilon(p) : T(q) \neq q$
  - $\forall\, T \notin \Gamma_p : T(U_\varepsilon(p)) \cap U_\varepsilon(p) = \emptyset$

  Dabei ist $U_\varepsilon(p)$ die Kreisscheibe um p mit Radius ε bzgl. der Poincaré-Metrik.

- Sei $p \in \mathbb{H}$ bel. aber fest. Γ_p ist endlich zyklisch und $\forall\, T \in \Gamma_p \setminus \{\mathrm{id}\} : T$ ist elliptisch.

- Die Fixpunkte der elliptischen Elemente $T \in \Gamma$ liegen diskret.

Satz 2.1 $\mathbb{H}/\Gamma$ ist eine Riemannsche Fläche.

Beweis Sei $\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\Gamma$ die kanonische Projektion. Definiere folgende Topologie auf $\mathbb{H}/\Gamma$: $U \subset \mathbb{H}/\Gamma$ offen $:\Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}$ offen. Dann ist $\mathbb{H}/\Gamma$ hausdorffsch und π stetig nach Konstruktion.

π ist offen. Sei $V \subset \mathbb{H}$ offen. $\pi(V)$ offen $\Leftrightarrow \hat{V} := \pi^{-1}(\pi(V)) \subset \mathbb{C}$ offen. $\hat{V} = \bigcup_{T\in\Gamma}(T(V))$ ist offen.

Um die Struktur auf $\mathbb{H}/\Gamma$ zu definieren, machen wir für $p \in \mathbb{H}$ eine Fallunterscheidung nach seinem Stabilisator Γ_p.

Fall 1: Sei $\Gamma_p = \{\mathrm{id}\}$. Wähle Umgebung $V \subset \mathbb{H}$ um p mit $T(V) \cap V = \emptyset\ \forall\, T \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$. Dann ist $\pi_{|V}$ injektiv. Mit $U := \pi(V)$ ist $\varphi := \pi_{|V}^{-1} : U \to V$ eine Karte um $\pi(p)$ auf $\mathbb{H}/\Gamma$.

Fall 2: Sei $\Gamma_p \neq \{\mathrm{id}\} \Rightarrow p$ ist Fixpunkt und Γ_p ist endlich, zyklisch und elliptisch. Sei $V \subset \mathbb{H}$ die Kreisscheibe um p wie in der Erinnerung $\Rightarrow V/\Gamma_p$ wohldef. Sei π_V die kanonische Projektion $V \to V/\Gamma_p$

Behauptung: π faktorisiert über V/Γ_p, d.h. $\exists!$ Homöomorphismus $g : V/\Gamma_p \to \mathbb{H}/\Gamma$ mit $g \circ \pi_V = \pi$. Beweis: Sei $u, v \in V, u \neq v$. $\pi_V(u) = \pi_V(v) \Leftrightarrow\ \exists\, T \in \Gamma_p : u = Tv \underset{\text{von } V}{\overset{\text{Wahl}}{\Leftrightarrow}} \exists\, T \in \Gamma : u = Tv \Leftrightarrow \pi_V(u) = \pi_V(v)$.

Behauptung: π_V hat außerhalb von $\pi_V(p)$ $n := |\Gamma_p|$ Urbilder. Annahme: $\exists\, z \in V/\Gamma_p$ mit weniger Urbilder $\Rightarrow\ \exists\, T, T' \in \Gamma_p : T^{-1}(z) = T'^{-1}(z) \Rightarrow \left(T' \circ T^{-1}\right)(z) = z$, d.h. $T' \circ T^{-1} \in \Gamma_p$ und hat Fixpunkt z. Wid. zur Wahl von V.

Setze nun:

$$\tau : V \to \tau(V) \subseteq \mathbb{C}, z \mapsto z - p$$

$$h : V \to U := h(V) \subseteq \mathbb{C}, z \mapsto \prod_{T\in\Gamma_p} \tau \circ T(z)$$

h ist Γ_p-invariant, d.h. $h \circ T = h\ \forall\, T \in \Gamma_p$. Sei $\xi \in U, \xi \neq \tau(p) = 0$. Behauptung: $\left|h^{-1}(\xi)\right| = n$. „$\geq$“: Sei z ein Urbild von ξ. Dann ist auch $T(z)\ \ \forall\, T \in \Gamma_p$ ein Urbild und diese sind alle verschieden, da $z \neq p$. „$\leq$": Betrachte

$$\xi = h(z) = (z-p) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i} - p \right) = (z-p) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{(a_i - pc_i) z + b_i - pd_i}{c_i z + d_i} \right)$$

für geeignete $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$. $T_i \in \Gamma_p$ elliptisch $\Rightarrow c_i \neq 0$; $a_i - pc_i \neq 0$, da sonst $T_i(\infty) = p$. Also ist der Zähler ein Polynom vom Grad n und der Nenner ein Polynom vom Grad $n-1 \Rightarrow$

$$\underbrace{\xi \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (c_i z + d_i)}_{\text{Polymom in } z \text{ vom Grad } n-1} = \underbrace{(z-p) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} ((a_i - pc_i) z + b_i - pd_i)}_{\text{Polymom in } z \text{ vom Grad } n}$$

d.h. z durchläuft die Nullstellen eines Polynoms vom Grad n. Das sind höchstens n verschiedene.

h ist Γ_p-invariant $\Rightarrow h$ faktorisiert über V/Γ_p, d.h. h steigt ab zu $\bar{h} : V/\Gamma_p \to U$ mit $\bar{h} \circ \pi_V = h$. Weiter ist $\bar{h}$ nicht kostant, stetig und offen, da h dies auch ist. Behauptung: $\bar{h}$ ist injektiv. Annahme: $\exists\, u, w \in V/\Gamma_p$ mit $u \neq w$ und $\bar{h}(u) = \bar{h}(w)$. u, w haben jeweils n Urbilder unter π_V in $V \Rightarrow \bar{h}(u)$ hat $2n$ Urbilder in V unter h, Wid. Also ist $\bar{h}$ ein Homöomorphismus. $\left(\pi(V), \varphi := \bar{h} \circ g^{-1}\right)$ ist eine Karte um $\pi(p)$ auf $\mathbb{H}/\Gamma$.

Sei $\mathfrak{A}$ die Menge aller nach 1 und 2 erzeugbaren Karten. Noch zu zeigen: $\mathfrak{A}$ ist ein Atlas, d. h. $\varphi, \psi \in \mathfrak{A}$ sind holomorph verträglich.

Fall φ, ψ sind vom Typ 1: Nach Konstruktion gilt $\psi \circ \varphi^{-1} = \pi^{-1}_{|U_\psi} \circ \left(\pi^{-1}_{|U_\varphi}\right)^{-1} = \pi^{-1}_{|U_\psi} \circ \pi \in \Gamma$ und damit biholomorph.

Fall φ ist vom Typ 1, ψ ist vom Typ 2: Sei φ Karte um $\pi(q)$ und ψ Karte um $\pi(p)$ für $q, p \in \mathbb{H}$. Seien $V_\varphi, V_\psi \subset \mathbb{H}$ die jeweiligen Umgebungen und $\pi(V_\varphi) \cap \pi(V_\psi) \neq \emptyset$. O.B.d.A. $V_\varphi \cap V_\psi \neq \emptyset$. (Andernfalls kann V_φ mit einem geeigneten $T \in \Gamma$ verschoben werden.) Dann ist aber $\psi \circ \varphi^{-1} = h$, wobei h die gleichnamige Abbildung aus der Konstruktion von ψ ist. h ist bijektiv und holomorph. ∎

Bemerkung 2.2 $\mathbb{H}/\Gamma$ erbt die Poincaré-Metrik von $\mathbb{H}$ vermöge der obigen Projektionen.

3 Der Satz von Siegel (ohne Beweis)

In diesem und dem folgenden Kapitel sei Γ stets eine Fuchssche Gruppe und $F := F_p := D_p(\Gamma)$ eine Dirichlet-Fundamentalbereich zu Γ für ein $p \in \mathbb{H}$.

Erinnerung (Vortrag 10)

- $\bar{F}$ Abschluss von F bzgl. der durch die Poincaré-Metrik induzierten Topologie; es gilt $\bar{F} = F$
- $\tilde{F}$ Abschluss von F bzgl. der durch die euklidischen Metrik induzierten Topologie; insb. $\tilde{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
- $\partial F = \bar{F} \setminus \mathring{F}$ hyberpolische Rand von F

- $\partial_0 F = \tilde{F} \setminus F$ (sic!) euklidischer Rand von F; $\partial_0 F \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $\partial_0 F \cap \partial F = \emptyset$.
- Die größte in ∂F liegende Teilmenge einer Geodätischen heißt geodätische Seite; der Schnitt zweier geodätischer Seiten oder der Fixpunkt eines elliptischen Elements von Γ heißt geodätische Ecke
- Die größte in $\partial_0 F$ liegende Teilmenge einer euklidischen Gerade heißt freie Seite; ein isolierter Punkt in $\partial_0 F$ heißt freie Ecke

Definition 3.1 1) Γ heißt **geometrisch endlich** $:\Leftrightarrow$ F hat endlich viele Seiten

2) Γ heißt **Gitter** $:\Leftrightarrow \mu(\mathbb{H}/\Gamma) := \mu(F) < \infty$. $\mu(\mathbb{H}/\Gamma)$ heißt **Volumen des Gitters**.

Bemerkung 3.2 Beachte, dass in obiger Definition die Existenz von freien Ecken und Seiten zugelassen ist.

Satz 3.3 (Siegel, ohne Beweis) Γ ist Gitter $\Rightarrow$ Γ ist geometrisch endlich

4 Kokompakte Fuchssche Gruppen, parabolische Elemente und Spitzen

Definition 4.1 Γ heißt **kokompakt** $:\Leftrightarrow \mathbb{H}/\Gamma$ ist kompakt.

Satz 4.2 F kompakt $\Rightarrow \forall\, T \in \Gamma : T$ nicht parabolisch.

Beweis Sei

$$\begin{aligned}\eta(z) &:= \inf\{\rho(z, T(z)) : T \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}, T \text{ nicht elliptisch}\}\\ &\underset{\text{diskret}}{\overset{\Gamma\text{-Bahn}}{=}} \min\{\rho(z, T(z)) : T \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}, T \text{ nicht elliptisch}\}\end{aligned}$$

$T \in \Gamma$ stetig $\Rightarrow \eta(\cdot)$ stetig. F kompakt $\Rightarrow \exists\, z_0 \in F\ \exists\, T_0 \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}, T_0$ nicht elliptisch: $\eta := \inf\{\eta(z) : z \in F\} = \eta(z_0) = \rho(z_0, T_0(z_0))$ und $\eta > 0$.

Sei nun $z \in \mathbb{H} \setminus F$, $S \in \Gamma$ so, dass $w = S(z) \in F$, $T \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}$, nicht elliptisch. Es gilt:

$$\rho(z, T(z)) = \rho(S(z), ST(z)) = \rho\left(w, STS^{-1}(w)\right) \geq \eta$$

und damit

$$\inf\{\rho(z, T(z)) : z \in \mathbb{H}, T \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\},\ \text{nicht elliptisch}\} = \eta > 0 \qquad \blacksquare$$

Annahme: Es ex. $T' \in \Gamma$, T' parabolisch. O.B.d.A. $T'(z) = z+1$. Es gilt: $\rho(z, z+1) = \frac{1}{\operatorname{Im} z} \to 0$ für $\operatorname{Im} z \to \infty$, Wid.

Satz 4.3 1) F nicht kompakt $\Rightarrow \mathbb{H}/\Gamma$ nicht kompakt.

2) $\mu(F) < \infty$, aber nicht kompakt $\Rightarrow F$ besitzt eine Ecke in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Beweis Sei $F = F_p$, $\alpha \in S^1$ und $z_\alpha : [0, \infty) \to \mathbb{H}, z_\alpha(0) = p$ eine Parameterisierung des geodätischen Strahls von p in Richtung α. (Für später: O. B. d. A. sei $\alpha = 0$ senkrecht nach oben.)

Da F konvex ist, schneidet z_α ∂F exakt ein Mal oder liegt vollständig in F. Somit kann man die Längenfunktion $\tau(\alpha)$ definieren, wobei $\tau(\alpha) := \infty$ für den zweiten Fall. Offensichtlich ist τ stetig für alle α mit $\tau(\alpha) < \infty$. Sei $\tau(\alpha) < \infty \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \tau$ beschränkt $\Rightarrow F$ kompakt.

Sei nun F nicht kompakt $\Rightarrow \exists \alpha_0 \in S^1 : \tau(\alpha_0) = \infty$. Nach Identifikation der kongruenten Punkte von F erhalten wir die Mannigfaltigkeit $\mathbb{H}/\Gamma$, welche eine unbeschränkte Teilmenge enthält $\Rightarrow$ 1).

Sei s der Schnittpunkt von z_{α_0} mit $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Es gilt: $s \in \partial_0 F$. Nach Satz 3.3 hat F endlich viele Seiten und Ecken. $\mu(F) < \infty \Rightarrow F$ hat keine freie Seite $\Rightarrow s$ ist freie Ecke $\Rightarrow$ 2). ∎

Lemma 4.4 $\mathbb{H}/\Gamma$ kompakt $\Leftrightarrow F$ kompakt

Beweis „$\Rightarrow$": nach Satz 4.3, Punkt 1). „$\Leftarrow$": klar ∎

Definition 4.5 Sei $p \in \mathbb{H}$ und z_α wie im Beweis von Satz 4.3. $B_t(p)$ sei der hyperbolische Kreis mit Mittelpunkt $z(t)$ und Berührpunkt p. $\lim_{t\to\infty} B_t(p)$ existiert und heißt **Horozyklus**.

Definition u. Bemerkung 4.6 1) $\lim_{t\to\infty} B_t(p)$ hängt nur ab von p und α. D. h. $\omega(p, \alpha) := \lim_{t\to\infty} B_t(p)$ wohldefiniert.

2) $\omega(p, \alpha)$ hat eine der folgenden Gestalten:

   (i) Falls $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$: $\omega(p, \alpha)$ ist ein euklidischer Kreis durch p senkrecht zu α sowie mit Tangente $\mathbb{R}$.

   (ii) Falls $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$: $\omega(p, \alpha)$ ist eine euklidische Gerade durch p parallel zu $\mathbb{R}$.

3) Sei $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $p \in \mathbb{H}$ und $\alpha := \alpha(s, p) \in \mathbb{R}$ so, dass $z_\alpha(0) = p$ und $\lim_{t\to\infty} z_\alpha(t) = s$ ist. Setze $\omega(s) := \{\omega(p, \alpha) : p \in \mathbb{H}\}$.

Satz 4.7 Sei $S \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ mit Fixpunkt $s \in \mathbb{R}$. S parabolisch $\Leftrightarrow \forall \omega \in \omega(s) : S(\omega) = \omega$.

Beweis „$\Rightarrow$": Sei $R \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ mit $R(s) = \infty \Rightarrow S' := R \circ S \circ R^{-1}$ parabolisch mit $S'(\infty) = \infty \Rightarrow S'(z) = z + h$ mit $h \in \mathbb{R}$. Sei $\omega' := R\omega \in \omega(\infty)$. Dann: $S'(\omega') = h + \omega'$. R winkelerhaltend $\Rightarrow S(\omega) = \omega$.
„$\Leftarrow$": Betrachte wieder $S' := R \circ S \circ R^{-1} \Rightarrow S'(z) = az + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $S'(\infty) = \infty$. Vor. $\Rightarrow \forall \omega \in \omega(\infty) : S'(\omega) = \omega$, d.h. horizontale Geraden werden auf sich abgebildet $\Rightarrow a = 1 \Rightarrow S'$ parabolisch $\Rightarrow S$ parabolisch. ∎

Satz 4.8 $\mu(F_p) < \infty$, aber nicht kompakt. Dann gilt:

1) $\forall\, b \in \partial_0 F$ (beachte: b ist also freie Ecke): $\exists\, T \in \Gamma$ mit $T(b) = b$ und T parabolisch

2) Sei $b \in \mathbb{H}$ Fixpunkt für ein parabolisches Element von Γ. Dann gilt: $\exists\, S \in \Gamma$: $S(b) \in \partial_0 F$.

Beweis Nur 1): Sei $(S_i(F) : S_i \in \Gamma, b \in \partial_0 S_i(F))_{i\in\mathbb{N}}$ die Folge derjenigen Bilder von F, die b als freie Ecke besitzen. Offensichtlich $|\{S_i(F)\}| = \infty$.

Seien $b^{(k)} \in \tilde{F}$ für $k = 0, \ldots, n$ die kongruenten Ecken zu b, also $b^{(k)} = T_k(b)$ mit $b^{(0)} = b$. Nach Satz 3.3 ist n endlich.

Setze nun $\left(T'_j\right)_{j\in\mathbb{N}} := (S_i \circ T_k)_{i\in\mathbb{N}, k=0,\ldots,n}$. Für jedes S_i existiert ein T_k, sodass $T'_j(b) = b$, d.h. es existieren unendlich viele T'_j mit b als Fixpunkt. O.B.d.A. $T'_j(b) = b\ \forall\, j \in \mathbb{N}$.

Zu zeigen: $T := T'_j$ ist parabolisch. Annahme: T nicht parabolisch. Betrachte die Geodätische $\gamma_1 : [0,\infty) \to F$ mit $\gamma_1(0) = p$, $\lim_{t\to\infty} \gamma_1(t) = b$ und $t = \rho(p, \gamma_1(t))$. (Beachte: F konvex.) $T(p) \notin F \Rightarrow T(p) \notin \operatorname{Bild}(\gamma_1) \Rightarrow$

$$\rho(p, \gamma_1(t)) < \rho(T(p), \gamma_1(t)) \text{ für } 0 \leq t < \infty \qquad (\star)$$

Betrachte den Horozyklus $\omega \in \omega(b)$ mit $p \in \omega$. T nicht parabolisch $\Rightarrow T(p) \notin \omega$. O.B.d.A. $T(p)$ liegt im Inneren von ω. Sei $\gamma_2 : [0,\infty) \to F$ die Geodätische durch $T(p)$ und b. Sei q der Schnittpunkt von ω und und $\operatorname{Bild}(\gamma_2)$; sei die Parameterisierung von γ_2 so, dass $\gamma_2(0) = q$, $\lim_{t\to\infty} \gamma_2(t) = b$ und $t = \rho(p, \gamma_2(t))$.

Es gilt: $\rho(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \to 0$ für $t \to \infty$. (Nachrechnen!)

Es folgt:

$$\begin{aligned} t = \rho(p, \gamma_1(t)) = \rho(q, \gamma_2(t)) &= \rho(q, T(p)) + \rho(T(p), \gamma_2(t)) \\ &\geq \rho(q, T(p)) + \rho(T(p), \gamma_1(t)) - \underbrace{\rho(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}_{\to 0} \end{aligned}$$

und damit für hinreichend große t

$$\rho(p, \gamma_1(t)) > \rho(T(p), \gamma_1(t))$$

Wid. zu $(\star)$. ∎

Lemma 4.9 Γ ist kokompakt $\Leftrightarrow \mu(\mathbb{H}/\Gamma) < \infty$ und Γ hat keine parabolischen Elemente.

Beweis Folgt aus Satz 3.3, Satz 4.3 und Satz 4.8. ∎