Hyperbolische Geometrie II

Matthias Frank

Satz 1.3.1

Die Gruppe $Isom(\mathbb{H})$ wird von Möbiustransformationen

$\left\{z \to \frac{az+b}{cz+d} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad-bc=1\right\} \cong PSL(2,\mathbb{R})$ und $z \mapsto -\bar{z}$ erzeugt.

Sie ist isomorph zu PS*L$(2,\mathbb{R}) \cong \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid det = \pm 1\right\} / \{\pm I\}$.

Bemerkung

Sei $\Phi \in Isom(\mathbb{H})$, dann heißt Φ

- orientierungserhaltend, wenn $\Phi \in PSL(2,\mathbb{R})$.
- orientierungsumkehrend, wenn $\Phi \in \left\{z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \middle| ad-bc=-1\right\}$

Satz 1.3.2

Jede Transformation in $PSL(2,\mathbb{R})$ erhält den orientierten Winkel; jede der Form $\left\{z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \middle| ad-bc=-1\right\}$ erhält den Betrag des Winkels, ändert aber die Orientierung, d.h. ändert das Vorzeichen des Winkels.

Bemerkung

Die Familie der euklidischen Kreise stimmt mit der Familie der hyperbolischen Kreise überein.

Satz 1.3.3

Die Topologie auf $\mathbb{H}$, die durch die hyperbolische Metrik induziert wird, ist dieselbe wie die, die durch die euklidische Metrik induziert wird.

Definition

Für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{H}$ definieren wir $\mu(A) = \int_A \frac{dx\,dy}{y^2}$.

$\mu(A)$ heißt das hyperbolische Flächenmaß.

Satz 1.4.1

Das hyperbolische Flächenmaß ist invariant unter allen Transformationen $T \in PSL(2,\mathbb{R})$,

d.h. es gilt: $\mu\big(T(A)\big) = \mu(A)$.

<u>Definition</u>

Ein hyperbolisches n-seitiges Polygon ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\widetilde{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit n geodätischen Segmenten als Rand. Der Schnittpunkt zweier Segmente heißt „Ecke" des Polygons. Die Ecken dürfen auch auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ liegen.

<u>Satz 1.4.2</u> (Gauss-Bonnet)

Sei Δ ein hyperbolisches Dreieck mit den Winkeln α, β, γ. Dann gilt:

$$\mu(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$