Ist $\mathcal{CH}$ die Kategorie der Kettenkomplexe (von Moduln) mit Kettenkomplexabbildungen, so ist die Homotopiekategorie $\mathcal{K}$ definiert als Kategorie mit denselben Objekten wie $\mathcal{CH}$ und Homotopieklassen von Kettenkomplexabbildungen als Morphismen. $\mathcal{K}$ ist eine additive Kategorie und man hat einen kanonischen, additiven Funktor $F : \mathcal{CH} \to \mathcal{K}$. $\mathcal{K}$ ist aber nicht abelsch und hier konstruiere ich ein Gegenbeispiel.

Lemma 1 *In jeder abelschen Kategorie gilt für ein solches Diagramm mit exakten Zeilen*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

folgendes:
Sind zwei der drei Morphismen f, g, h Isomorphismen, dann ist auch jeweils der dritte Morphismus ein Isomorphismus.

Beweis Der Fall, dass f, h Isomorphismen sind, ist bereits vom 5er-Lemma abgedeckt. Alle anderen Fälle kann man genauso mit dem 5er-Lemma erledigen, wenn man das Diagramm links und rechts mit 0en ergänzt:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Nun kann man jeweils einen Teil des Diagramms herausnehmen, so dass der "fehlende"Morphismus genau in der Mitte liegt und das 5er-Lemma sagt dann, der "fehlende"Morphismus auch ein Isomorphismus ist.

Insbesondere kann man nun in $\mathcal{K}$ ein Gegenbeispiel zu diesem Lemma konstruieren und somit kann $\mathcal{K}$ nicht abelsch sein. Abstrakt lässt sich ein Gegenbeispiel mit Hilfe von Zylindern konstruieren. Seien B, C, D R-Moduln, die als Komplexe aufgefasst werden und $0 \to B \to C \to D \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Dann hat man folgendes kommutierendes Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{f} & C & \xrightarrow{g} & D & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \uparrow{\scriptstyle \beta} & & \uparrow{\scriptstyle \varphi} & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{j} & cyl(f) & \xrightarrow{p} & cone(f) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

wobei β die Homotopieäquivalenz zwischen $cyl(f)$ und C ist und φ die Abbildung $cone(f) \to D, (b, c) \mapsto g(c)$ ist. Nun kann man zeigen, dass φ nur dann eine Homotopieäquivalenz ist, wenn die kurze exakte Sequenz der Moduln spaltend ist. Hat man das bewiesen, so sind $=, \beta$ Isomorphismen in der Homotopiekategorie $\mathcal{K}$, φ jedoch nicht, falls die Sequenz $0 \to B \to C \to D \to 0$ nicht spaltend ist.

Beweis Der Komplex $cone(f)$ hat folgende Gestalt:

$$cone(f): \qquad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow B \xrightarrow{-f} C \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

„⇒“: Ist φ eine Homotopieäquivalenz, dann gibt es eine Abbildung $\psi : D \to cone(f)$, so dass $\varphi\psi \simeq id_D$ und $\psi\varphi \simeq id_{cone(f)}$:

$$\begin{tikzcd} & \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & D \arrow[r] \arrow[d, bend left, "\psi"] & 0 \arrow[r] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "-f"'] & C \arrow[r] \arrow[u, bend left, "g=\varphi"] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Da im Komplex D für jede Homotopie s offenbar $ds + sd = 0$ ist, muss $g\psi = id_D$ sein. Insbesondere ist ψ auch ein Modul-Homomorphismus und die Existenz von ψ ist eine der äquivalenten Charakterisierungen von spaltenden kurzen exakten Sequenzen.

„⇐“: Eine weitere Charakterisierung von spaltenden kurzen exakten Sequenzen ist die folgende: Es existiert ein Isomorphismus $\phi : C \simeq B \oplus D$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d] & C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\phi"] & D \arrow[d] \\ B \arrow[r] & B \oplus D \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

Hat man nun die Abbildung $\psi : D \to B \oplus D \to C$, so ist wegen dem oberen Diagramm $g\psi = id_D$. Sei nun $\pi : C \to B \oplus D \to B$ die Projektion, dann gilt, dass $\psi g + f\pi = id_C$ und insbesondere lässt sich dies in eine Homotopieäquivalenz unserer ursprünglichen Komplexe übersetzen.

Ein konkretes Gegenbeispiel kann ebenfalls konstruiert werden, im Prinzip mit jeder nicht spaltenden exakten Sequenz, so zum Beispiel

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$