CRASHKURS TOPOLOGIE

FLORIAN NISBACH

1. Grundbegriffe

Der zentrale Begriff in der Topologie ist der topologische Raum. Mit seiner Hilfe kann man den metrischen Stetigkeitsbegriff auf einen deutlich allgemeineren Kontext übertragen.

Definition und Bemerkung 1. a) Ein topologischer Raum ist eine Menge X zusammen mit einer Topologie, d.h. einem Mengensystem $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$
- $\mathcal{S} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \in \mathcal{T}$

Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen offen in X, ihre Komplemente abgeschlossen in X.
b) Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig, wenn für alle $U \subset Y$ gilt: $f^{-1}(U) \subset Y$ ist offen.
c) Die topologischen Räume bilden zusammen mit den stetigen Abbildungen eine Kategorie **Top**. Ein Isomorphismus zwischen topologischen Räumen heißt Homöomorphismus.

In einem metrischen Raum haben zwei nicht übereinstimmende Punkte positiven Abstand voneinander. In allgemeinen topologischen Räumen ist es oft nicht möglich, Punkte voneinander "topologisch" zu trennen. Man führt deshalb Klassen von topologischen Räumen ein, in denen unterschiedlich starke "Trennungsaxiome" gelten. Eine wichtige solche Klasse bilden die Hausdorffräume.

Definition 2. X heißt Hausdorff- oder T_2-Raum, wenn gilt: $\forall x \neq y \in X \; \exists U_x \ni x, U_y \ni y$ offen mit $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Wir benötigen später noch einige weitere Begriffe aus der Topologie:

Definition 3. (Teilmengentopologie) Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Die Teilmengentopologie auf A wird wie folgt erklärt: Die offenen Mengen in A sind genau die mit A geschnittenen offenen Mengen in X.

Definition 4. (Quotiententopologie) Es sei X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, sowie $\pi : X \to \bar{X} := X/_\sim$ die kanonische Projektion. Definiere auf $\bar{X}$ eine Topologie durch $M \subset \bar{X}$ offen $:\Leftrightarrow \pi^{-1}(M)$ offen in X. Diese heißt Quotiententopologie auf $\bar{X}$.

Definition 5. (Homotopie) Es seien $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen, $I = [0, 1]$. Eine Homotopie zwischen f und g ist eine stetige Abbildung $H : X \times I \to Y$ mit $H(\cdot, 0) = f$, $H(\cdot, 1) = g$. Die Abbildungen f und g heißen dann homotop. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation.

Definition 6. (Deformationsretrakt) Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ ein Unterraum. Ein Deformationsretrakt von X auf A ist eine Homotopie $H : X \times I \to X$ mit $H(\cdot, 0) = id_X$, $H(X, \{1\}) = A$.

2. Mannigfaltigkeiten

Wichtige Beispiele für topologische Räume sind Mannigfaltigkeiten. Informell ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ein Raum, der lokal aussieht wie ein Stück $\mathbb{R}^n$. Um Pathologien auszuschließen, fordert man das Hausdorff-Trennungsaxiom.

Definition und Bemerkung 7. a) Eine (topologische) n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein T_2-Raum X, sodass gilt: $\exists$ offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ und eine Familie von Homöomorphismen $(\varphi_i : U_i \to V_i)$ mit $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.
b) Da gilt: $V \subseteq \mathbb{R}^n, V' \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $V \cong V' \Rightarrow m = n$ (dies werden wir später beweisen können), ist n eindeutig bestimmt und heißt Dimension von X.

3. Simplizialkomplexe

Eine Möglichkeit, topologische Räume aus rein kombinatorischen Daten zu konstruieren, sind die Simplizialkomplexe. Sie werden uns recht bald in der Homologietheorie wieder begegnen.

Definition und Bemerkung 8. a) Ein (abstrakter) simplizialer Komplex ist eine Menge E (“Ecken”) zusammen mit einer Menge K endlicher, nichtleerer Teilmengen $s \subseteq E$ (“Simplizes”), sodass gilt:

- $\forall e \in E : \{e\} \in K$
- $\forall s \in K, \emptyset \neq t \subseteq s : t \in K$

b) Sei (E, K) ein simplizialer Komplex. Sei

$$V_E := \mathbb{R}^E_{\text{fin}} := \{\sum_{v\in E} \lambda_v \tilde{v},\ \text{nur endlich viele Summanden} \neq 0\ \}$$

wobei $\tilde{v} := \delta_v : E \to \mathbb{R}$ die Indikatorfunktion sei. Für $s \in K$, $s = \{v_0, \dots, v_n\}$ definiere

$$|s| := |\{\tilde{v_0}, \dots, \tilde{v_n}\}| = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \tilde{v_i},\ \sum \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0\}$$

Dies ist die konvexe Hülle der $\tilde{v_i}$. Die Vereinigung $|K| := \bigcup_{s\in K} |s|$ mit der Teilraumtopologie heißt kanonische Realisierung von K.
c) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $K = (K, E)$ ein simplizialer Komplex. $f : E \to V$ sei eine Abbildung mit:

- $\forall s = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$ sind $f(v_0), \dots, f(v_n)$ in allgemeiner Lage.
- Mit $|s|_f := |\{f(v_0), \dots, f(v_n)\}|$ gilt $\forall s, t \in K : |s|_f \cap |t|_f = |s \cap t|_f$.

Dann heißt $|K|_f := \bigcup_{s \in K} |s|_f$ mit der Teilraumtopologie eine geometrische Realisierung von K in V. Es gilt dann $|K| \cong |K|_f$.
d) Seien K, K' simpliziale Komplexe. Ein Morphismus $f : K \to K'$ ist eine Abbildung $f : E \to E'$, sodass gilt: $\forall s \in K : f(s) \in K'$. Durch

$$|f| : |K| \to |K|', \sum \lambda_i \tilde{v_i} \mapsto \sum \lambda_i \widetilde{f(v_i)}$$

wird eine stetige Abbildung zwischen den kanonischen Realisierungen definiert.
e) Die abstrakten simplizialen Komplexe bilden eine Kategorie **ASK**, und $|\cdot| : \textbf{ASK} \to \textbf{Top}$ ist ein kovarianter Funktor.

4. CW-Komplexe

Die im vorigen Abschnitt eingeführten Simplizialkomplexe sind zwar relativ “gutartig”, aber für manche Zwecke zu speziell. Eine allgemeinere Klasse sind die von Whitehead eingeführten CW-Komplexe.

Definition 9. Es sei X_0 ein diskreter topologischer Raum (d.h. $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X_0)$). Die topologischen Räume X_n, $n \in \mathbb{N}$ seien wie folgt induktiv definiert: Es sei eine Indexmenge I_n gegeben und für jedes $\alpha \in I_n$ eine Kopie $D^n_{(\alpha)}$ der abgeschlossenen n-dimensionalen Einheitskugel sowie eine stetige Abbildung $\varphi_\alpha : S^{n-1}_{(\alpha)} = \partial D^n_{(\alpha)} \to X_{n-1}$. Definiere $X_n := X_{n-1} \cup \bigcup_{\alpha \in I_n} D^n_{(\alpha)} /_\sim$. Dabei sei “$\sim$” die von $x \sim \varphi_\alpha(x), x \in \partial D^n_{(\alpha)}$ erzeugte Äquivalenzrelation. Es gilt $X_i \subseteq X_{i+1}$; setze $X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ mit der folgenden Topologie: $M \subseteq X$ offen $:\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : M \cap X_i$ offen in X_i. Diese heißt schwache Topologie. Ein auf diese Weise konstruierter topologischer Raum heißt CW-Komplex.

5. Homotopiegruppen

Die Homotopiegruppen $\pi_i(X)$ sind recht einfach zu definierende algebraische Invarianten eines topologischen Raumes X. Sie haben aber einen Nachteil: Während man $\pi_1(X)$, die Fundamentalgruppe eines gegebenen Raumes X, noch recht gut beherrschen kann, ist die Berechnung der höheren Homotopiegruppen mitunter sehr schwer. Die Homologiegruppen, die wir in den kommenden Vorträgen kennenlernen werden, sind ein wenig schwerer zu definieren, aber meistens deutlich besser zugänglich.

Definition und Bemerkung 10. a) Sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$. Für $i \in \mathbb{N}$ heißt dann $\pi_i(X, x_0) := \{f : I^n \to X \text{ stetig }, f|_{\partial I^n} = x_0\}/_\sim$ die i-te Homotopiemenge von X. Dabei soll gelten $f \sim g :\Leftrightarrow \exists H$ Homotopie zwischen f und g, sodass gilt: $\forall a \in \partial I^n, t \in I : H(a, t) = x_0$.

b) $\pi_0(X, x_0)$ lässt sich in natürlicher Weise mit der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X identifizieren. Für $i > 0$ ist $\pi_i(X, x_0)$ eine Gruppe, für $i \geq 2$ sogar eine abelsche Gruppe.
c) Gibt es einen Weg von x_0 nach $x_1 \in X$, dann gilt: $\pi_i(X, x_0) \cong \pi_i(X, x_1)$.
d) π_i ist ein kovarianter Funktor $\mathbf{Top}^{\cdot} \to \mathbf{Gr}$.

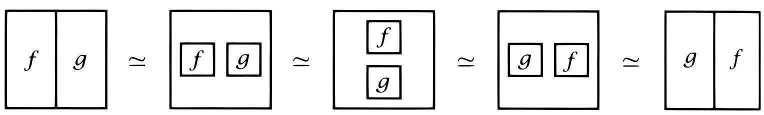
Im nun folgenden Beweis wird zu Gunsten der Lesbarkeit (und zu Ungunsten der Genauigkeit) nicht sorgfältig zwischen einer Abbildung $f : I^n \to X$ und ihrer Homotopieklasse unterschieden.

Beweis. b) Nimm als Verknüpfung

$$(f.g)(s_1, \ldots, s_n) := \begin{cases} f(2s_1, s_2, \ldots, s_n) & s_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_n) & s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dann gilt:

- $f.g$ ist wieder stetig.
- "." ist auf Homotopieklassen wohldefiniert
- "." ist (als Verknüpfung auf $\pi_i(X, x_0)$) assoziativ
- "." hat das Neutralelement $c_{x_0} : I^n \to X$, $s \mapsto x_0$
- bezüglich "." existiert zu f das Inverse
$$\tilde{f}(s_1, s_2, \ldots, s_n) := f(1 - s_1, s_2, \ldots, s_n)$$
denn: Die Abbildung
$$(s_1, \ldots, s_n, t) \mapsto \begin{cases} f(2s_1, s_2, \ldots, s_n) & s_1 \in [0, \frac{1-t}{2}] \\ f(1 - t, s_2, \ldots, s_n) & s_1 \in [\frac{1-t}{2}, \frac{1+t}{2}] \\ f(2 - 2s_1, s_2, \ldots, s_n) & s_1 \in [\frac{1+t}{2}, 1] \end{cases}$$
ist eine Homotopie zwischen $f.\tilde{f}$ und c_{x_0}.
- Für $i \geq 2$ ist "." kommutativ: siehe die folgende Skizze:



c) Ist $\gamma : I \to X$ ein Weg von x_0 nach x_1, dann ist

$$\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1),\ f \mapsto \tilde{\gamma}.f.\gamma$$

ein Isomorphismus. Für $i \geq 2$ ist der Beweis nicht viel schwerer, aber ein bisschen mühseliger auszuführen.
d) Es sei $\mathbf{Top}^{\cdot}$ die Kategorie der topologischen Räume X mit einem ausgezeichneten Punkt $x_0 \in X$ und $\mathrm{Mor}((X, x_0), (Y, y_0)) = \{f : X \to Y \text{ stetig mit } f(x_0) = y_0\}$. Ist dann $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ein Morphismus, so erkläre

$$\pi_i(f) : \pi_i(X, x_0) \to \pi_i(Y, y_0),\ \varphi \mapsto f \circ \varphi$$

Das ist ein kovarianter Funktor.

Literatur

[1] Allan Hatcher: *Algebraic Topology.* Cambridge University Press 2002
[2] Hans-Peter Rehm: *Algebraische Topologie.* Fragment, Karlsruhe ca. 2002