Vortrag im Seminar „Homologische Algebra“

Simpliziale und singuläre Homologie

Matthias Nagel

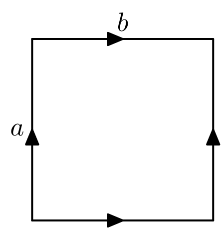
Wintersemester 2008/09

Ein einführendes Beispiel

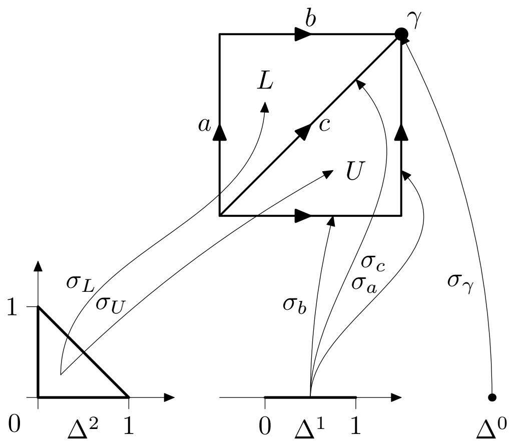
Ziel der hier behandelten Homologie ist es, einem topologischen Raum mithilfe eines geeignet definierten Kettenkomplexes eine Folge von (Homologie-)Gruppen zuzuordnen und ihn auf diese Weise zu charakterisieren.

Grobe Konstruktionsidee

1) Gegeben ein topologischer Raum X. Hier: Torus.



2) Zerlege X in Simplizes und definiere geeignete Abbildungen von den Standard-Simplizes Δ^k auf diese



3) Definiere freie abelsche Gruppen über diesen Abbildungen bzw. deren Bildern als Basis

$$\begin{aligned}
&\Delta_k(X) = \{0\} \quad \text{für } k > 2\\
&\Delta_2(X) = \mathrm{F}(\{\sigma_L, \sigma_U\}) = \mathrm{F}(\{L, U\})\\
&\Delta_1(X) = \mathrm{F}(\{\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c\}) = \mathrm{F}(\{a, b, c\})\\
&\Delta_0(X) = \mathrm{F}(\{\sigma_\gamma\}) = \mathrm{F}(\{\gamma\})
\end{aligned}$$

4) Definiere sog. Randhomomorphismen $\partial_n : \Delta_n(X) \to \Delta_{n-1}(X)$. Für den hier betrachteten Torus gilt zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
\partial_2(L) &= a - c + b\\
\partial_1(a) &= \gamma - \gamma = 0\\
&\cdots
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\cdots \to \Delta_2(X) \xrightarrow{\partial_2} \Delta_1(X) \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

ist ein Kettenkomplex und heißt Δ-Komplex zu X.

5) Definiere Homologiegruppen: $H_n^\Delta = \operatorname{Kern}\partial_n / \operatorname{Bild}\partial_{n+1}$

1 Simpliziale Homologie

Definition 1.1 1) Ein n-**Simplex** ist die abgeschlossene, konvexe Hülle von $n+1$ Punkten $\nu_0, \ldots, \nu_n \in \mathbb{R}^m$ $(m > n)$, wobei $\nu_1 - \nu_0, \ldots \nu_n - \nu_0$ linear unabhängig sind. Der Simplex wird mit dem Symbol $[\nu_0, \ldots, \nu_n]$ bezeichnet.

2)

$$\Delta^n := \left\{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_i t_i = 1 \text{ und } t_i \geq 0 \text{ für alle } i\right\} = [e_1, \ldots, e_{n+1}]$$

heißt **Standard-n-Simplex**.

3) Die Ecken eines Simplex seien entsprechend Ihrer Indizierung geordnet; die Kanten jeweils von der kleineren zur größeren Ecke gerichtet.

4) Ein n-Simplex $[\nu_0, \ldots, \nu_n]$ wird von $(n-1)$-Simplizes begrenzt, nämlich $[\hat{\nu}_0, \ldots, \nu_n]$, $\ldots$, $[\nu_0, \ldots, \hat{\nu}_n]$. Diese heißen **Facetten** des Simplex. Das Zeichen $\hat{}$ zeige dabei die Auslassung der Ecke an. Die Ordnung der Ecken in einem Unter-Simplex entspricht der Ordnung im Ober-Simplex.

Bemerkung 1.2 Sei $S := [\nu_0, \ldots, \nu_n]$ ein beliebiger n-Simplex. $\Delta^n \to S : (t_0, \ldots, t_n) \mapsto \sum_{i=0}^n t_i \nu_i$ ist der kanonische, ordnungserhaltene, lineare Homöomorphismus.

Definition 1.3 Ein **Δ-Komplex** auf einem Raum X ist ein System von stetigen Abbildungen $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$, $n = n(\alpha)$ mit:

1) Die Einschränkung $\sigma_{\alpha|\mathring{\Delta}^n}$ ist injektiv; alle Punkte von X sind Bild von genau einer solchen Einschränkung.

2) Sei δ eine Facette von Δ^n. Dann gilt: Für alle $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$ exisitiert $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \to X$ mit $\sigma_{\alpha|\delta} = \sigma_\beta$, wobei δ mit Δ^{n-1} auf kanonische Weise identifiziert wird.

3) $A \subset X$ offen $\Leftrightarrow \sigma_\alpha^{-1}(A) \subset \Delta^n$ offen für alle σ_α

Bemerkung 1.4 Im Folgenden gelte folgende Bezeichnung: $e_\alpha^n := \sigma_\alpha(\mathring{\Delta}^n) \subset X$. σ_α heißt die charakteristische Abbildung zu e_α^n.

Definition 1.5 1) $\Delta_n(X)$ sei die freie abelsche Gruppe über die n-dimensionalen Simplizes e_α^n

2) $\delta \in \Delta_n(X)$ heißt **n-Kette**; $\delta = \sum_\alpha k_\alpha e_\alpha^n = \sum_\alpha k_\alpha \sigma_\alpha$ (formale Summe) mit $k_\alpha \in \mathbb{Z}$

3) $\partial_n : \Delta_n(X) \to \Delta_{n-1}(X)$ mit $\partial_n(\sigma_\alpha) := \sum_i (-1)^i \sigma_{\alpha|[\nu_0, \ldots, \hat{\nu}_i, \ldots, \nu_n]}$ heißt **Randhomomorphismus**

Lemma 1.6 1) Die Verknüpfung $\Delta_n(X) \xrightarrow{\partial_n} \Delta_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \Delta_{n-2}(X)$ ist Null.

2) $\cdots \to \Delta_2(X) \xrightarrow{\partial_2} \Delta_1(X) \xrightarrow{\partial_1} \Delta_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$ ist ein Kettenkomplex.

Beweis 1)

$$\begin{aligned}\partial_{n-1}\partial_n(\sigma) &= \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j \sigma_{|[\nu_0,\ldots,\hat{\nu}_j,\ldots,\hat{\nu}_i,\ldots,\nu_n]} \\ &\quad + \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^{j-1} \sigma_{|[\nu_0,\ldots,\hat{\nu}_j,\ldots,\hat{\nu}_i,\ldots,\nu_n]} \\ &= 0\end{aligned}$$

2) folgt aus 1). ■

Definition 1.7 1) $H_n^\Delta(X) := \operatorname{Kern}\partial_n / \operatorname{Bild}\partial_{n+1}$ heißt n-te **simpliziale Homologiegruppe** von X

2) $x \in \operatorname{Kern}\partial_n$ heißt **Zyklus**

3) $x \in \operatorname{Bild}\partial_{n+1}$ heißt **Rand**

2 Singuläre Homologie

Definition 2.1 1) $\sigma : \Delta^n \to X$, σ stetig, heißt **singulärer n-Simplex**. Beachte: $\operatorname{Bild}\sigma$ ist nicht notwendigerweise ein Simplex.

2) $C_n(X)$ sei die freie abelsche Gruppe über alle singulären n-Simplizes von X.

3) $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ sei analog zu Definition 1.5 definiert.

4) Das System 1) – 3) heißt der **singuläre Komplex** $S(X)$.

5) $H_n(X) := \operatorname{Kern}\partial_n / \operatorname{Bild}\partial_{n+1}$ heißt **n-te singuläre Homologiegruppe**

Proposition 2.2 X zerfalle in die Zusammenhangskomponenten X_i, $i \in \mathbb{N}$. Dann: $H_n(X) \cong \bigoplus_i H_n(X_i)$.

Beweis $\operatorname{Bild}\sigma_\alpha$ zsh. $\Rightarrow C_n(X) \cong \bigoplus_i C_n(X_i)$. ∂_n respektiert die direkte Summe, d.h. $\partial_n : C_n(X_i) \to C_{n-1}(X_i) \Rightarrow \operatorname{Kern}\partial_n$ und $\operatorname{Bild}\partial_{n+1}$ zerfallen analog $\Rightarrow$ Beh. ■

Proposition 2.3 Falls X nicht leer und pfadzusammenhängend ist, gilt $H_0(X) = \mathbb{Z}$. D.h. für beliebiges X gilt: $H_0(X) = \bigoplus_{|\text{Zsh.'komp. von } X|} \mathbb{Z}$

Beweis Sei $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ mit $\sum_\alpha k_\alpha \sigma_\alpha \mapsto \sum_\alpha k_\alpha$. $X \neq \emptyset \Rightarrow \varepsilon$ surj. Beh.: $\operatorname{Kern}\varepsilon = \operatorname{Bild}\partial_1$.

Wegen

$$\cdots \to C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

folgt $H_0(X) = \operatorname{Kern}\partial_0 / \operatorname{Bild}\partial_1 = C_0(X)/\operatorname{Bild}\partial_1 \overset{\text{Beh.}}{=} C_0(X)/\operatorname{Kern}\varepsilon \overset{\text{Hom'satz}}{=} \mathbb{Z}$.

Beweis der Beh.: „$\supseteq$“: Sei $\sigma : \Delta^1 \to X$. Dann: $\varepsilon\partial_1(\sigma) = \varepsilon(\sigma_{|[\nu_1]} - \sigma_{|[\nu_0]}) = 1 - 1 = 0$

„$\subseteq$": Sei $\varepsilon(\sum_\alpha k_\alpha \sigma_\alpha) = \sum_\alpha k_\alpha = 0$. Die σ_α sind 0-Simplizes, gehören also zu Punkten $\gamma_\alpha \in X$. Wähle weiteren 0-Simplex $\tilde{\sigma}$ bzw. Punkt $\tilde{\gamma} \in X$. Verbinde mit 1-Simplizes $\tau_\alpha : \Delta^1 \to [\gamma_\alpha, \tilde{\gamma}]$, da X zsh. Es gilt $\partial_1 \tau_\alpha = \gamma_\alpha - \tilde{\gamma}$, also

$$\partial_1 \left(\sum_\alpha k_\alpha \tau_\alpha \right) = \sum_\alpha k_\alpha \gamma_\alpha - \underbrace{\sum_\alpha k_\alpha \tilde{\gamma}}_{=0} = \sum_\alpha k_\alpha \gamma_\alpha \in \operatorname{Bild} \partial_1 \qquad \blacksquare$$

Proposition 2.4 Sei X ein Punkt. Dann $H_n(X) = 0$ für $n > 0$ und $H_0(X) = \mathbb{Z}$.

Beweis Es gibt für jedes n genau einen eindeutigen n-Simplex σ_n und es gilt

$$\partial_n(\sigma_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \, \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \sigma_{n-1} & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

D. h. der Komplex ist

$$\cdots \to \mathbb{Z} \xrightarrow[\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}]{\partial_4} \mathbb{Z} \xrightarrow[0]{\partial_3} \mathbb{Z} \xrightarrow[\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}]{\partial_2} \mathbb{Z} \xrightarrow[0]{\partial_1} \mathbb{Z} \xrightarrow[0]{\partial_0} 0$$

Offensichtlich gilt dann: $H_0(X) = \operatorname{Kern} \partial_0 / \operatorname{Bild} \partial_1 = \mathbb{Z}/\{0\} = \mathbb{Z}$ und $H_n(X) = 0$ sonst. $\blacksquare$

3 Homotopie-Invarianz

Proposition 3.1 Seien X, Y topologische Räume. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ induziert einen Gruppenhomomorphismus $f_\star : H_n(X) \to H_n(Y)$ für jedes n.

Beweis Definiere $f_\sharp : C_n(X) \to C_n(Y)$ durch $f_\sharp(\sigma) = f \circ \sigma$ und $f_\sharp(\sum_\alpha k_\alpha \sigma_\alpha) = \sum_\alpha k_\alpha f_\sharp(\sigma_\alpha)$. Es gilt $f_\sharp \partial_n^X = \partial_n^Y f_\sharp$ für jedes n, da

$$\begin{aligned} f_\sharp \partial_n^X(\sigma) &= f_\sharp \big(\sum_i (-1)^i \sigma_{|[\nu_0,\ldots,\hat{\nu}_i,\ldots,\nu_n]} \big) \\ &= \sum_i (-1)^i (f \circ \sigma)_{|[\nu_0,\ldots,\hat{\nu}_i,\ldots,\nu_n]} \\ &= \partial_n^Y f_\sharp(\sigma) \end{aligned}$$

Damit ist $f_\sharp$ eine Kettenabbildung, bildlich:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^X} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n^X} & C_{n-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_\sharp & & \downarrow f_\sharp & & \downarrow f_\sharp & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^Y} & C_n(Y) & \xrightarrow{\partial_n^Y} & C_{n-1}(Y) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Ferner gilt $f_\sharp(\operatorname{Kern}\partial_n^X) \subseteq \operatorname{Kern}\partial_n^Y$ und $f_\sharp(\operatorname{Bild}\partial_{n+1}^X) \subseteq \operatorname{Bild}\partial_{n+1}^Y$. Somit induziert $f_\sharp$ einen Gruppenhomomorphismus $f_\star : H_n(X) \to H_n(Y)$. ∎

Satz 3.2 Zwei homotope Abbildungen $f, g : X \to Y$, induzieren den gleichen Gruppenhomomorphismus $f_\star = g_\star : H_n(X) \to H_n(Y)$

Beweis Sei $I := [0,1]$, $F : X \times I \to Y$ die Homotopie von f nach g, d. h. $F(\,\cdot\,,0) = f(\,\cdot\,)$ und $F(\,\cdot\,,1) = g(\,\cdot\,)$.

Das Produkt $\Delta^n \times I$ (ein Prisma mit Δ^n als Grundfläche) wird wie folgt in $(n+1)$-Simplizes zerlegt: Sei $[\nu_0, \dots, \nu_n] = \Delta^n \times \{0\}$ und $[\omega_0, \dots, \omega_n] = \Delta^n \times \{1\}$. Das Prisma besteht aus den Simplizes $[\nu_0, \dots, \nu_i, \omega_i, \dots, \omega_n]$ für $i = 0, \dots, n$.

Der „Prismen"-Operator $P : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ sei definiert als

$$P(\sigma) = \sum_i (-1)^i \left(F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I)\right)_{|[\nu_0,\dots,\nu_i,\omega_i,\dots,\omega_n]}$$

Beh.: $\partial_{n+1}^Y P = g_\sharp - f_\sharp - P\partial_n^X$. Bew.:

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}^Y P(\sigma) &= \sum_{\substack{i,j\\ j\le i}} (-1)^i (-1)^j \left(F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I)\right)_{|[\nu_0,\dots,\hat\nu_j,\dots,\nu_i,\omega_i,\dots,\omega_n]} \\
&\quad + \sum_{\substack{i,j\\ j\ge i}} (-1)^i (-1)^{j+1} \left(F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I)\right)_{|[\nu_0,\dots,\nu_i,\omega_i,\dots,\hat\omega_j,\dots,\omega_n]} \\
&= \sum_k \left(F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I)\right)_{|[\nu_0,\dots,\hat\nu_k,\omega_k,\dots,\omega_n]} - \left(F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I)\right)_{|[\nu_0,\dots,\nu_k,\hat\omega_k,\dots,\omega_n]} \\
&\quad + \sum_{\substack{i,j\\ j< i}} (-1)^i (-1)^j \left(F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I)\right)_{|[\nu_0,\dots,\hat\nu_j,\dots,\nu_i,\omega_i,\dots,\omega_n]} \\
&\quad + \sum_{\substack{i,j\\ j> i}} (-1)^i (-1)^{j+1} \left(F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I)\right)_{|[\nu_0,\dots,\nu_i,\omega_i,\dots,\hat\omega_j,\dots,\omega_n]} \\
&= \left(F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I)\right)_{|[\hat\nu_0,\omega_0,\dots,\omega_n]} - \left(F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I)\right)_{|[\nu_0,\dots,\nu_n,\hat\omega_n]} \\
&\quad - \sum_{\substack{i,j\\ j> i}} (-1)^i (-1)^j \left(F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I)\right)_{|[\nu_0,\dots,\nu_i,\omega_i,\dots,\hat\omega_j,\dots,\omega_n]} \\
&\quad - \sum_{\substack{i,j\\ j< i}} (-1)^i (-1)^{j+1} \left(F \circ (\sigma \times \mathrm{id}_I)\right)_{|[\nu_0,\dots,\hat\nu_j,\dots,\nu_i,\omega_i,\dots,\omega_n]} \\
&= g_\sharp(\sigma) - f_\sharp(\sigma) - P\partial_n^X
\end{aligned}$$

Sei nun $\sigma \in C_n(X)$ ein Zyklus, also $f_\sharp(\sigma), g_\sharp(\sigma) \in \operatorname{Kern}\partial_n^Y$. Dann gilt: $g_\sharp(\sigma) - f_\sharp(\sigma) = \partial_{n+1}^Y P(\sigma) + P\partial_n^X(\sigma) = \partial_{n+1}^Y P(\sigma) \in \operatorname{Bild}\partial_{n+1}^Y$. Also liegen $f_\sharp(\sigma), g_\sharp(\sigma)$ in der gleichen Homologie-Klasse. ∎

Proposition 3.3 Sei $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz. Dann sind die Abb. $f_\star : H_n(X) \to H_n(Y)$ Isomorphismen für alle n.

Beweis Folgt aus Satz 3.2 und $(fg)_\star = f_\star g_\star$ sowie $\mathrm{id}_\star = \mathrm{id}$. ∎

Beispiel 3.4 Kontrahierbare Räume haben triviale Homologie.

Literatur

Allen Hatcher: „Algebraic Topology“, Cambridge University Press, 2002, S. 102–113