Homologie von Kettenkomplexen

Gregor Bethlen

1 Die Kategorie Ch der Kettenkomplexe

Definition 1.1

- Eine Familie $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ von R-Moduln mit einer zugehörigen Familie $\{d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ von R-linearen Abbildungen $d_n : C_n \to C_{n-1}$ mit $(d_{n-1} \circ d_n : C_n \to C_{n-2}) = 0$ heißt **Kettenkomplex** $C.$ **von R-Moduln**.
- d_n heißt **Differential** von $C.$.
- $Z_n := Z_n(C.) := \mathrm{Kern}(d_n) \subseteq C_n$ heißt **Modul der n-Zyklen von** $C.$.
- $B_n := B_n(C.) := \mathrm{Bild}(d_{n+1}) \subseteq Z_n$ heißt **Modul der n-Ränder von** $C.$.
- $H_n := H_n(C.) := Z_n/B_n$ heißt **n-ter Homologiemodul von** $C.$. ∎

Beispiel 1.2
$\ldots = C_{-3} = C_{-2} = C_{-1} = 0, \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = C_0 = C_1 = C_2 = \ldots$
$\ldots = d_{-2} = d_{-1} = d_0 = 0, (\overline{x} \mapsto 4\overline{x}) = d_1 = d_2 = d_3 = \ldots$
$\ldots = Z_{-2} = Z_{-1} = 0, Z_0 = C_0, \{0, 2, 4, 6\} = Z_1 = Z_2 = Z_3 = \ldots$
$\ldots = B_{-3} = B_{-2} = B_{-1} = \{0\}, \{0, 4\} = B_0 = B_1 = B_2 = \ldots$
$\ldots = H_{-2} = H_{-1} = \{0\}, H_0 = Z_0/B_0 \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong Z_1/B_1 = Z_2/B_2 = \ldots$ ∎

Definition 1.3

- Eine Familie von R-Modul-Homomorphismen $u_n : C_n \to D_n$ mit $u_{n-1} \circ d_n^{C.} = d_n^{D.} \circ u_n$ heißt **Kettenkomplexabbildung** $u : C. \to D.$.
- Die Kategorie **Ch** = **Ch(R-mod)** besteht aus den Objekten »Kettenkomplex« und den Morphismen »Kettenkomplexabbildungen«. ∎

Lemma 1.4

$$H_n : \begin{cases} \mathbf{Ch(R\text{-}mod)} & \to \mathbf{R\text{-}mod} \\ C. & \mapsto H_n(C.) \\ u : C. \to D. & \mapsto \begin{cases} H_n(C.) & \to H_n(D.) \\ x + B_n(C.) & \mapsto u_n(x) + B_n(D.) \end{cases} \end{cases}$$ ist kovarianter Funktor.

Beweis

- Es gilt $u_n(B_n(C.)) \subseteq B_n(D.)$, $u_n(Z_n(C.)) \subseteq Z_n(D.)$. Damit erhalten wir, daß die Abbildung $\begin{cases} Z_n(C.)/B_n(C.) & \to Z_n(D.)/B_n(D.) \\ x + B_n(C.) & \mapsto u_n(x) + B_n(D.) \end{cases}$ wohldefiniert ist.
- $H_n(\mathrm{id}_{C.}) = \begin{cases} H_n(C.) & \to H_n(C.) \\ x + B_n(C.) & \mapsto \mathrm{id}_{C_n}(x) + B_n(C.) = x + B_n(C.) \end{cases} = \mathrm{id}_{H_n(C.)}$
- Seien $u : C. \to D.$, $v : D. \to E.$.

  $H_n(v) \circ H_n(u)$

  $= \begin{cases} H_n(D.) & \to H_n(E.) \\ y + B_n(D.) & \mapsto v_n(y) + B_n(E.) \end{cases} \circ \begin{cases} H_n(C.) & \to H_n(D.) \\ x + B_n(C.) & \mapsto u_n(x) + B_n(D.) \end{cases}$

  $= \begin{cases} H_n(C.) & \to H_n(E.) \\ x + B_n(C.) & \mapsto v_n \circ u_n(x) + B_n(E.) \end{cases} = H_n(v \circ u)$ ■

Vorsicht: $H_n(u) \neq u_n$ (zumindest im allgemeinen).

Definition und Bemerkung 1.5 Seien $C.$, $D.$ Kettenkomplexe.

- $C.$ heißt **azyklisch**, falls $H_n(C.) = 0$ für alle n. Dies ist äquivalent zu: Der Komplex ist exakt an jedem C_n.
- Ein Morphismus $u : C. \to D.$ heißt **Quasiisomorphismus** (oder **Homologismus**), falls $H_n(u)$ ein Isomorphismus ist für alle n.
- Ein Morphismus $u : C. \to D.$ ist ein **Isomorphismus** genau dann, falls alle u_n R-Modul-Isomorphismen sind.
- $C.$ heißt **beschränkt**, falls $C_n = 0$ für fast alle n. Die beschränkten Kettenkomplexe bilden eine Unterkategorie $\mathbf{Ch}_b$ von $\mathbf{Ch}$.
- Der **Träger** von $C.$ liegt in $[a, b]$, falls $C_n = 0$ für $n \notin [a, b]$.
- $C.$ heißt **von oben beschränkt**, falls es eine Schranke b gibt, so daß $C_n = 0$ für alle $n > b$. Die von oben beschränkten Kettenkomplexe bilden eine Unterkategorie $\mathbf{Ch}_-$ von $\mathbf{Ch}$.
- $C.$ heißt **von unten beschränkt**, falls es eine Schranke a gibt, so daß $C_n = 0$ für alle $n < a$. Die von unten beschränkten Kettenkomplexe bilden eine Unterkategorie $\mathbf{Ch}_+$ von $\mathbf{Ch}$. Spezialfall für $a = 0$: $\mathbf{Ch}_{\geq 0}$ ■

2 Operationen und Eigenschaften

Definition 2.1 Sei $\{A._\alpha\}_\alpha = \{\{A_{\alpha,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}\}_\alpha$ eine Familie von Kettenkomplexen mit zugehörigen Differentialen $\{d_\alpha\}_\alpha = \{\{d_{\alpha,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}\}_\alpha$.

- Der Kettenkomplex $\prod_\alpha A._\alpha$ besteht aus der Familie $\{\prod_\alpha A_{\alpha,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ von R-Moduln und den Differentialen $\{\prod_\alpha d_{\alpha,n} : \prod_\alpha A_{\alpha,n} \to \prod_\alpha A_{\alpha,n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, die kanonisch definiert sind, und heißt **Produktkettenkomplex**.

- Der Kettenkomplex $\oplus_\alpha A._\alpha$ besteht aus der Familie $\{\oplus_\alpha A_{\alpha,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ von R-Moduln und den Differentialen $\{\oplus_\alpha d_{\alpha,n} : \oplus_\alpha A_{\alpha,n} \to \oplus_\alpha A_{\alpha,n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, die kanonisch definiert sind, und heißt **Coproduktkettenkomplex**. ■

Definition 2.2 Seien $D. = \{D_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, C. = \{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ Kettenkomplexe mit zugehörigen Differentialen $d^{D.} = \{d_n^{D.}\}_{n\in\mathbb{Z}}, d^{C.} = \{d_n^{C.}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

- $D.$ heißt **Unterkettenkomplex** von $C.$, falls D_n Untermodul von C_n und $d_n^{D.} = d_n^{C.}|_{D_n}$ für alle $n \in Z$ (wir erhalten dann aus der Inklusion $D_n \subseteq C_n$ eine Kettenkomplexabbildung $D. \to C.$).

- Sei $D.$ ein Unterkettenkomplex von $C.$. $C./D.$ heißt **Quotientenkettenkomplex** von $C.$ und besteht aus den Quotientenmoduln C_n/D_n mit kanonischen Differentialen $(x+D_n \mapsto d_n^{C.}(x)+D_{n-1})$ (diese sind wohldefiniert, da $d_n^{C.}(D_n) = d_n^{D.}(D_n) \subseteq D_{n-1}$). ■

Definition und Bemerkung 2.3 Sei $C.$ ein Kettenkomplex und $m \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Definiere } \tau_{\geq m}C. \text{ durch } (\tau_{\geq m}C.)_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n < m \\ Z_n & \text{falls } n = m \\ C_n & \text{falls } n > m \end{cases}.$$

- Der Unterkettenkomplex $\tau_{\geq m}C.$ von $C.$ heißt **Abschnitt von $C.$ unterhalb m**; die Differentiale sind gerade geeignete Einschränkungen von $d_n^{C.}$.

  Es gilt $H_n(\tau_{\geq m}C.) = 0$ für $n < m$ und $H_n(\tau_{\geq m}C.) = H_n(C.)$ für $n \geq m$.

- Der Quotientenkettenkomplex $\tau_{<m}C. := C./(\tau_{\geq m}C.)$ heißt **Abschnitt von $C.$ oberhalb m**.

  Es gilt $H_n(\tau_{<m}C.) = H_n(C.)$ für $n < m$ und $H_n(\tau_{<m}C.) = 0$ für $n \geq m$. ■

Definition und Bemerkung 2.4 Sei $C.$ ein Kettenkomplex und $p \in \mathbb{Z}$.

Dann ist $C.[p]$ mit $C[p]_n = C_{n+p}$ und den Differentialen $d'_n : C[p]_n \to C[p]_{n-1} = (-1)^p d_{p+n}$ ein Kettenkomplex und heißt die **p-te Verschiebung von $C.$**.

Es gilt $H_n(C.[p]) = H_{n+p}(C.)$. ■

3 Abelsche Kategorien

Definition 3.1 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie; a, b, s, q, x, z seien Objekte aus $\mathcal{C}$.

- Ein Morphismus $i : a \to b$ heißt **invertierbar** (oder **Isomorphismus**), falls es einen Morphismus $i' : b \to a$ aus $\mathcal{C}$ gibt mit $i' \circ i = 1_a$ und $i \circ i' = 1_b$.
- Ein Morphismus $m : a \to b$ heißt **monomorph** in $\mathcal{C}$, falls für zwei beliebige Morphismen $g_1, g_2 : x \to a$ aus $m \circ g_1 = m \circ g_2$ folgt, daß $g_1 = g_2$ gilt (m ist **links kürzbar**).
- Ein Morphismus $e : a \to b$ heißt **epimorph** in $\mathcal{C}$, falls für zwei beliebige Morphismen $g_1, g_2 : b \to x$ aus $g_1 \circ e = g_2 \circ e$ folgt, daß $g_1 = g_2$ gilt (e ist **rechts kürzbar**).
- q heißt **initial** in $\mathcal{C}$, falls es zu jedem Objekt a genau einen Morphismus $q \to a$ gibt. Initiale Objekte sind bis auf Isomorphie eindeutig.
- s heißt **terminal** in $\mathcal{C}$, falls es zu jedem Objekt a genau einen Morphismus $a \to s$ gibt. Terminale Objekte sind bis auf Isomorphie eindeutig.
- z heißt **Nullobjekt** in $\mathcal{C}$, falls es sowohl initial als auch terminal ist. ∎

Definition 3.2 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

- Ein Morphismus $f : a \to b$ heißt **Links-Nullmorphismus**, falls für jedes Objekt d aus $\mathcal{C}$ und für alle $g, h : d \to a$ gilt: $f \circ g = f \circ h$.
- Ein Morphismus $f : a \to b$ heißt **Rechts-Nullmorphismus**, falls für jedes Objekt d aus $\mathcal{C}$ und für alle $g, h : b \to d$ gilt: $g \circ f = h \circ f$.
- Ein Morphismus $f : a \to b$ heißt **Nullmorphismus**, falls er Links- und Rechts-Nullmorphismus ist. ∎

Lemma 3.3 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit Nullobjekt z. Dann gilt:

- $f : z \to b$ ist ein Nullmorphismus.
- $g : a \to z$ ist ein Nullmorphismus.
- $f \circ g : a \to b$ ist ein Nullmorphismus. Wir nennen $f \circ g$ auch $0_{(a,b)}$. ∎

Definition und Bemerkung 3.4 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit Nullobjekt z; a, b, d, x Objekte aus $\mathcal{C}$; $f : a \to b$ ein Morphismus.

- Ein Morphismus $k : d \to a$ heißt **Kern** von f, falls $f \circ k = 0_{(d,b)}$ gilt und es zu jedem Morphismus $h : \ x \to a$ mit $f \circ h = 0_{(x,b)}$ genau einen Morphismus $h' : x \to d$ gibt mit $h = k \circ h'$.

  Ein Kern ist monomorph: Seien $g_1, g_2 : x \to d$ mit $k \circ g_1 = k \circ g_2$. Setze $h := k \circ g_1 : x \to a$. Dann gilt $f \circ h = f \circ k \circ g_1 = 0_{(x,b)}$. Also gibt es genau ein $h' : x \to d$ mit $h = k \circ h'$. Es gilt also $h = k \circ h' = k \circ g_1 = k \circ g_2$. Da h' eindeutig ist, folgt $g_1 = g_2$.

  Wir dürfen weiter den Kern als Unterobjekt von a betrachten.

- Ein Morphismus $c : b \to d$ heißt **Cokern** von f, falls $c \circ f = 0_{(a,d)}$ gilt und es zu jedem Morphismus $h : \ b \to x$ mit $h \circ f = 0_{(a,x)}$ genau einen Morphismus $h' : d \to x$ gibt mit $h = h' \circ c$.

  Ein Cokern ist epimorph: Seien $g_1, g_2 : d \to x$ mit $g_1 \circ c = g_2 \circ c$. Setze $h := g_1 \circ c : b \to x$. Dann gilt $h \circ f = g_1 \circ c \circ f = 0_{(a,x)}$. Also gibt es genau ein $h' : d \to x$ mit $h = h' \circ c$. Es gilt also $h = h' \circ c = g_1 \circ c = g_2 \circ c$. Da h' eindeutig ist, folgt $g_1 = g_2$.

  Wir dürfen weiter den Cokern als Quotientenobjekt von b betrachten.

- Das **Bild** von f ist das Unterobjekt Kern(Cokern(f)) von b. ∎

Definition und Bemerkung 3.5

- Eine Kategorie $\mathcal{A}$ heißt **Ab-Kategorie**, falls jede Morphismenmenge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(a, b)$ mit einer abelschen Gruppenstruktur versehen werden kann, so daß Distributivgesetze für Komposition und Addition gelten: $h \circ (g + g') \circ f = h \circ g \circ f + h \circ g' \circ f$.

- Ein **additiver Funktor** $F : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ zwischen Ab-Kategorien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{A}$ ist ein Funktor, so daß $\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(b, b') \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(Fb, Fb')$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

- Eine **additive Kategorie** ist eine Ab-Kategorie $\mathcal{A}$ mit einem Nullobjekt und einem Produkt $a \times b$ für jedes Paar a, b von Objekten aus $\mathcal{A}$.

- Eine **abelsche Kategorie** ist eine additive Kategorie $\mathcal{A}$ mit folgenden Eigenschaften:
  1) Jeder Morphismus in $\mathcal{A}$ besitzt einen Kern.
  2) Jeder Morphismus in $\mathcal{A}$ besitzt einen Cokern.
  3) Jeder Monomorphismus in $\mathcal{A}$ ist der Kern seines Cokerns.
  4) Jeder Epimorphismus in $\mathcal{A}$ ist der Cokern seines Kerns. ∎

Bemerkung 3.6 Wir haben für die Definition von Kettenkomplexen von R-Moduln lediglich die Existenz von Kern und Bild benötigt. Alles, was wir in Abschnitt 1 zu Kettenkomplexen definiert haben, ist auch für Kettenkomplexe beliebiger abelscher Kategorien gültig, da hier ebenfalls Kerne und Bilder existieren. ∎

4 Ch($\mathcal{A}$) ist eine abelsche Kategorie

Satz 4.1 Die Kategorie $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ ist eine Ab-Kategorie

Beweis Addiere die Kettenkomplexmorphismen gradweise: $\{f_n\}+\{g_n\} := \{f_n+g_n\}$.■

Satz 4.2 Die Kategorie $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ ist eine additive Kategorie.

Beweis Das Nullobjekt ist der Kettenkomplex »0«, der aus Nullobjekten und Nullmorphismen besteht. Das Produkt zweier Kettenkomplexe ist wieder ein Kettenkomplex (verfahre wie in Definition 2.1 für $\alpha = \{1, 2\}$). ■

Satz 4.3 Die Kategorie $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ ist eine abelsche Kategorie.

Beweis Wir überprüfen die Bedingungen aus Definition und Bemerkung 3.5.

1) Jeder Morphismus in $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ besitzt einen Kern.

   Sei $f : a. \to b.$ ein Morphismus, also $f = \{f_n : a_n \to b_n\}$. Da $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie ist, existieren $k_n : d_n \to a_n$ mit k_n Kern von f_n. Bezeichne Ding := $\{k_n : d_n \to a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : d. \to a.$.

   Behauptung: $d.$ ist ein Kettenkomplex und Ding : $d. \to a.$ ist Morphismus.

   Denn: Bezeichne Differentiale mit e. Aus $f_n \circ (e^{a.}_{n+1} \circ k_{n+1}) = e^{b.}_{n+1} \circ f_{n+1} \circ k_{n+1} = e^{b.}_{n+1} \circ 0_{(d_{n+1},b_{n+1})} = 0_{(d_{n+1},b_n)}$ folgt, da k_n ein Kern von f_n ist, daß ein $e^{d.}_{n+1}$ existiert mit $k_n \circ e^{d.}_{n+1} = e^{a.}_{n+1} \circ k_{n+1}$. Falls $d.$ ein Kettenkomplex ist, ist Ding : $d. \to a.$ also ein Morphismus.

   Weiter gilt $k_{n-1} \circ e^{d.}_n \circ e^{d.}_{n+1} = e^{a.}_n \circ e^{a.}_{n+1} \circ k_{n+1} = 0_{(a_{n+1},a_{n-1})} \circ k_{n+1} = 0_{(d_{n+1},a_{n-1})} = k_{n-1} \circ 0_{(d_{n+1},d_{n-1})}$, und da k_{n-1} monomorph ist, folgt $e^{d.}_n \circ e^{d.}_{n+1} = 0_{(d_{n+1},d_{n-1})}$. Also ist $d.$ ein Kettenkomplex.

   Behauptung: Ding : $d. \to a.$ ist ein Kern von f.

   Denn: $f_n \circ k_n = 0_{(d_n,b_n)}$, da k_n Kern von f_n ist. Also ist auch $f \circ \text{Ding} = 0_{(d.,b.)}$. Und für jeden Morphismus $h = \{h_n : x_n \to a_n\} : x. \to a.$ mit $f \circ h = 0_{(x.,b.)}$ gilt insbesondere für $n \in \mathbb{Z}$: $f_n \circ h_n = 0_{(x_n,b_n)}$, also existiert, da k_n Kern von f_n ist, ein $h'_n : x_n \to d_n$ mit $h_n = k_n \circ h'_n$. Ingesamt gilt für $h' = \{h'_n : x_n \to d_n\} : x. \to d.$, daß $h = \text{Ding} \circ h'$.

   Ab jetzt heißt Ding auch k.

2) Jeder Morphismus in $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$ besitzt einen Cokern.

   Sei $f : a. \to b.$ ein Morphismus, also $f = \{f_n : a_n \to b_n\}$. Da $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie ist, existieren $c_n : b_n \to d_n$ mit c_n Cokern von f_n. Bezeichne Dong := $\{c_n : b_n \to d_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : b. \to d.$.

   Behauptung: $d.$ ist ein Kettenkomplex und Dong : $b. \to d.$ ist Morphismus.

   Denn: Bezeichne Differentiale mit e. Aus $(c_{n-1} \circ e^{b.}_n \circ f_n = c_{n-1} \circ f_{n-1} \circ e^{a.}_n = 0_{(a_{n-1},d_{n-1})} \circ e^{a.}_n = 0_{(a_n,d_{n-1})}$ folgt, da c_n ein Cokern von f_n ist, daß ein $e^{d.}_n$

existiert mit $e^{d.}_n \circ c_n = c_{n-1} \circ e^{b.}_n$. Falls $d.$ ein Kettenkomplex ist, ist Dong $: b. \to d.$ also ein Morphismus.

Weiter gilt $e^{d.}_n \circ e^{d.}_{n+1} \circ c_{n+1} = c_{n-1} \circ e^{b.}_n \circ e^{b.}_{n+1} = c_{n-1} \circ 0_{(b_{n+1}, b_{n-1})} = 0_{(b_{n+1}, d_{n-1})} = 0_{(d_{n+1}, d_{n-1})} \circ c_{n+1}$, und da c_{n+1} epimorph ist, folgt $e^{d.}_n \circ e^{d.}_{n+1} = 0_{(d_{n+1}, d_{n-1})}$. Also ist $d.$ ein Kettenkomplex.

Behauptung: Ein Cokern von f ist Dong $: b. \to d.$.

Denn: $c_n \circ f_n = 0_{(a_n, d_n)}$, da c_n Cokern von f_n ist. Also ist auch Dong$\circ f = 0_{(a.,d.)}$. Und für jeden Morphismus $h = \{h_n : b_n \to x_n\} : b. \to x.$ mit $h \circ f = 0_{(a.,x.)}$ gilt insbesondere für $n \in \mathbb{Z}$: $h_n \circ f_n = 0_{(a_n, x_n)}$, also existiert, da c_n Cokern von f_n ist, ein $h'_n : d_n \to x_n$ mit $h_n = h'_n \circ c_n$. Ingesamt gilt für $h' = \{h'_n : d_n \to x_n\} : d. \to x.$, daß $h = h' \circ$ Dong.

Ab jetzt heißt Dong auch c.

3) Jeder Monomorphismus in **Ch($\mathcal{A}$)** ist der Kern seines Cokerns.

   Sei $f : a. \to b.$ ein Monomorphismus. Sei $k : d. \to a.$ wie eben. Dann gilt $f \circ k = 0_{(d.,b.)} = f \circ 0_{(d.,a.)}$. Da f monomorph ist, folgt also $k = 0_{(d.,a.)}$, daher $k_n = 0_{(d_n, a_n)}$. Also ist f_n monomorph. Da $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie ist, ist f_n der Kern seines Cokerns $c_n : b_n \to x_n$. Also ist f der Kern seines Cokerns $c = \{c_n : b_n \to x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : b. \to x.$.

4) Jeder Epimorphismus in **Ch($\mathcal{A}$)** ist der Cokern seines Kerns.

   Sei $f : a. \to b.$ ein Epimorphismus. Sei $c : b. \to d.$ wie eben. Dann gilt $c \circ f = 0_{(a.,d.)} = 0_{(b.,d.)} \circ f$. Da f epimorph ist, folgt also $c = 0_{(b.,d.)}$, daher $c_n = 0_{(b_n, d_n)}$. Also ist c_n epimorph. Da $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie ist, ist f_n der Cokern seines Kerns $k_n : x_n \to a_n$. Also ist f der Cokern seines Kerns $k = \{k_n : x_n \to a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : x. \to a.$.

Im folgenden zeigen wir die Aussage noch einmal für den Spezialfall $\mathcal{A} =$ **R-mod**.

1) Jeder Morphismus in **Ch(R-mod)** besitzt einen Kern.

   Sei $f : B. \to C.$ eine Kettenkomplexabbildung, also $f = \{f_n : B_n \to C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Bezeichne $\mathrm{Ding}(f) := \{\mathrm{Kern}(f_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

   Behauptung: Ein Kern von f ist nun $k : \mathrm{Ding}(f) \to B. = \{k_n : \mathrm{Kern}(f_n) \to B_n\}$ mit $k_n = \mathrm{id}_{\mathrm{Kern}(f_n)}$.

   Denn: $f \circ k = 0_{(\mathrm{Ding}(f), C.)}$. Und für jeden Morphismus $h : A. \to B.$ mit $f \circ h = 0_{(A.,C.)}$ gilt insbesondere für $n \in \mathbb{Z}$: $f_n \circ h_n = 0$, also $h_n(A_n) \subseteq \mathrm{Kern}(f_n)$; erhalten also ein $h' : A. \to \mathrm{Ding}(f)$ mit $k \circ h' = h$, nämlich $h' = h$.

   Ab jetzt nennen wir $\mathrm{Ding}(f)$ auch $\mathrm{Kern}(f)$. $\mathrm{Kern}(f)$ ist ein Unterkettenkomplex von $B.$.

2) Jeder Morphismus in **Ch(R-mod)** besitzt einen Cokern.

   Sei $f : B. \to C.$ eine Kettenkomplexabbildung, also $f = \{f_n : B_n \to C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Bezeichne $\mathrm{Dong}(f) := \{\mathrm{Cokern}(f_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Behauptung: Ein Cokern von f ist nun $c : C. \to \text{Dong}(f) = \{c_n : C_n \to \text{Cokern}(f_n)\}$ mit $c_n(x) = x + \text{Bild}(f_n)$.

Denn: $c \circ f = 0_{(B.,\text{Dong}(f))}$. Und für jeden Morphismus $h : C. \to D.$ mit $h \circ f = 0_{(B.,D.)}$ gilt insbesondere für $n \in \mathbb{Z}$: $h_n \circ f_n = 0$, also $f_n(B_n) \subseteq \text{Kern}(h_n)$; erhalten also ein $h' : \text{Dong}(f) \to D.$ mit $h' \circ c = h$, nämlich $h'_n(\overline{x}) = h_n(x)$. Diese Abbildung ist wohldefiniert: Sei $\overline{x} = \overline{y}$, also $x = y + f_n(w)$ für ein $w \in B_n$. Dann gilt $h_n(x) = h_n(y + f_n(w)) = h_n(y) + h_n(f_n(w)) = h_n(y)$.

Ab jetzt nennen wir Dong(f) auch Cokern(f). Cokern(f) ist ein Quotientenkettenkomplex von $C.$.

3) Jeder Monomorphismus in **Ch(R-mod)** ist der Kern seines Cokerns.

   Sei $f : B. \to C.$ eine monomorphe Kettenkomplexabbildung. Sei k wie eben. Dann gilt $f \circ k = 0$. Da f monomorph ist, folgt also $k = 0$. Also muß auch Kern$(f) = 0$ sein, da k die Inklusion ist. Also gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$, daß Kern$(f_n) = 0$, also sind alle f_n injektiv. Damit ist $B.$ isomorph zu einem Unterkettenkomplex $B'_. = f(B.)$ von $C.$. Ein Kern von $C. \to C./B'_.$ ist $\text{id}_{B'_.} : B'_. \to C.$, und dies ist isomorph zu f. Also ist auch f ein Kern von $C. \to C./f(B.) = \text{Cokern}(f)$.

4) Jeder Epimorphismus in **Ch(R-mod)** ist der Cokern seines Kerns.

   Sei $f : B. \to C.$ eine epimorphe Kettenkomplexabbildung. Sei c wie eben. Dann gilt $c \circ f = 0$. Da f epimorph ist, folgt also $c = 0$. Also muß auch Cokern$(f) = 0$ sein, da er das Bild von c ist. Also gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$, daß Cokern$(f_n) = 0$, also sind alle f_n surjektiv. Damit ist $C.$ isomorph zu einem Quotientenkettenkomplex $C'_. = B./\text{Kern}(f)$ von $B.$. Ein Cokern von Kern$(f) \to B.$ ist $\pi : B. \to C'_.$, und dies ist isomorph zu f. Also ist auch f ein Cokern von Kern$(f) \to B.$. ■