

# Totalkomplexe, lange exakte Sequenzen, Freyd-Mitchell-Einbettung

Joachim Breitner

18. November 2008

Mein Vortrag gliedert sich in drei Teile, die weitgehend unabhängig voneinander sind. Zuerst knüpfe ich an Gregors Vortrag an und führe Doppelkomplexe ein. Danach kommen wir zu den langen exakten Sequenzen der Homologien, und schließen nächste Woche mit der Freyd-Mitchell-Einbettung ab.

## Doppelkomplexe und Totalkomplexe

**Definition 1** Ein *Doppelkomplex* in einer abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  ist eine Familie  $\{C_{p,q}, p, q \in \mathbb{Z}\}$  mit Abbildungen

$$d^h : C_{p,q} \rightarrow C_{p-1,q} \quad \text{und} \quad d^v : C_{p,q} \rightarrow C_{p,q-1}$$

so dass  $d^h \circ d^h = 0$ ,  $d^v \circ d^v = 0$  und  $d^h \circ d^v + d^v \circ d^h = 0$ .

Ein Doppelkomplex heißt *beschränkt*, wenn in jeder Diagonalen  $p + q = n$  nur endlich viele Objekte nicht Null sind.

Als Diagramm sieht das ganze so aus, wobei die Kästchen hier nicht kommutieren, sondern *antikommutieren*:

$$\begin{array}{ccccccc}
& \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots & \longleftarrow & C_{p-1,q+1} & \xleftarrow{d^h} & C_{p,q+1} & \xleftarrow{d^h} & C_{p+1,q+1} & \longleftarrow \cdots \\
& & \downarrow d^v & & \downarrow d^v & & \downarrow d^v & \\
\cdots & \longleftarrow & C_{p-1,q} & \xleftarrow{d^h} & C_{p,q} & \xleftarrow{d^h} & C_{p+1,q} & \longleftarrow \cdots \\
& & \downarrow d^v & & \downarrow d^v & & \downarrow d^v & \\
\cdots & \longleftarrow & C_{p-1,q-1} & \xleftarrow{d^h} & C_{p,q-1} & \xleftarrow{d^h} & C_{p+1,q-1} & \longleftarrow \cdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots & & 
\end{array}$$

Hier sieht man nun auf jeder Horizontalen einen (einfachen) Kettenkomplex. Zwei nebeneinanderliegende sind durch die vertikalen Pfeile verbunden. Es stellt sich jetzt die Frage, ob es sich dabei jeweils um eine Kettenkomplex-Abbildung, also einen Morphismus in  $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$  handelt. Dem ist, wegen der Antikommutativität, erstmal nicht so, aber man kann einen sogenannten *Vorzeichen-trick* anwenden.

Kettenkomplex-Abbildungen  $f_{*q} : C_{*,q} \rightarrow C_{*,q-1}$  können definiert werden durch

$$f_{p,q} = (-1)^p d_{p,q}^v : C_{p,q} \rightarrow C_{p,q-1}$$

Damit kann man die Kategorie der Doppelkomplexe in  $\mathcal{A}$  mit der Kategorie  $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ch}(\mathcal{A}))$  der Kettenkomplexen von Kettenkomplexen in  $\mathcal{A}$  identifizieren.

Warum also überhaupt diese Antikommutativität? Diese wird nützlich, wenn wir *Totalkomplexe* betrachten:

**Definition 2** Sei  $C$  ein Doppelkomplex. Der *Totalkomplex* von  $C$  ist der Kettenkomplex  $\text{Tot}(C) = \text{Tot}\prod(C)$  gegeben durch

$$\text{Tot}(C)_n = \prod_{p+q=n} C_{p,q}$$

und die Abbildungen

$$d = d^h + d^v : \text{Tot}(C)_n \rightarrow \text{Tot}(C)_{n-1}.$$

Man beachte hier, dass ich das direkte Produkt verwendet habe. Man kann auch mit den direkten Koprodukten einen Totalkomplex definieren, der dann im Allgemeinen anders aussieht, aber für beschränkte Doppelkomplexe mit ihm übereinstimmt. Auch muss man aufpassen, dass man nicht in jeder Kategorie  $\mathcal{A}$  alle unendlichen direkten Produkte und Koprodukte bilden kann – aber in  $R\text{-mod}$  und  $\mathbf{Ch}(R\text{-mod})$  geht das.

Ich habe in der Definition behauptet, dass dies ein Kettenkomplex ist. Dazu müssen wir noch nachrechnen, dass  $d \circ d = 0$  ist. Dies ist schnell gemacht, und lässt sich auch am Diagramm nachvollziehen. Dass man so ausklammern darf, geht, weil  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie ist:

$$d \circ d = (d^h + d^v) \circ (d^h + d^v) = d^h \circ d^h + d^h \circ d^v + d^v \circ d^h + d^v \circ d^v = 0$$

Das wars auch schon zu Doppelkomplexen, und wir kommen zum nächsten Thema.

## Lange exakte Sequenzen

Wir wollen hier einen wichtigen Satz für die Homologische Algebra herleiten, der besagt, dass man aus einer kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen auf natürliche Weise eine lange exakte Sequenz bekommt:

**Satz 1** Sei

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Dann gibt es natürliche Abbildungen  $\partial : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$ , genannt Verbindungshomomorphismen, so dass

$$\dots \xrightarrow{g} H_{n+1}(C) \xrightarrow{\partial} H_n(A) \xrightarrow{f} H_n(B) \xrightarrow{g} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{f} \dots$$

eine lange exakte Sequenz bildet.

Um zu diesem Ergebnis zu kommen, brauchen wir eines der bekannten drei kategorientheoretische Lemmata: Das Neunerlemma, das Schlangenlemma und das Fünferlemma, die ich hier alle vorstelle.

**Lemma 1 (Neuner-Lemma)** In einer abelschen Kategorie kommutiere das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & C'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

wobei alle Spalten exakt sind. Es gilt

- Wenn die oberen beiden Zeilen exakt sind, dann ist es auch die untere.
- Wenn die unteren beiden Zeilen exakt sind, dann ist es auch die obere.
- Wenn die untere und obere Zeile exakt sind, und  $A \rightarrow C$  die Nullabbildung ist (d.h. die mittlere Zeile ist ein Kettenkomplex), dann ist die mittlere Zeile exakt.

Dieses Lemma werde ich jetzt nicht beweisen, dafür das nächste um so ausführlicher:

**Lemma 2 (Schlangenlemma)** In der Kategorie  $R\text{-mod}$  kommutiere das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & A' & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{p} & C' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \longrightarrow & C & & 
 \end{array}$$

Wenn die Zeilen exakt sind, gibt es eine exakte Sequenz

$$\ker(f) \rightarrow \ker(g) \rightarrow \ker(h) \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker}(f) \rightarrow \operatorname{coker}(g) \rightarrow \operatorname{coker}(h)$$

wobei

$$\partial(c') = (i^{-1} \circ g \circ p^{-1})(c'), \quad c' \in \ker(h).$$

Ist darüber hinaus  $A' \rightarrow B'$  monisch, dann ist es auch  $\ker(f) \rightarrow \ker(g)$ , und ist  $B \rightarrow C$  episch, dann ist es auch  $\operatorname{coker}(g) \rightarrow \operatorname{coker}(h)$ .

An der Tafel das Bild ergänzen zu:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \ker(f) & \longrightarrow & \ker(g) & \longrightarrow & \ker(h) & \xrightarrow{\partial} & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 A' & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{p} & C' & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \longrightarrow & C \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \operatorname{coker}(f) & \longrightarrow & \operatorname{coker}(g) & \longrightarrow & \operatorname{coker}(h) & & 
 \end{array}$$

Dieses Lemma will ich recht ausführlich beweisen, um ein paar Beispiele für die Diagrammjagd mit Elementen als auch für kategorientheoretische Beweise ohne Elemente zu geben.

Was müssen wir hier zeigen? Zuerst sollten wir überlegen, warum das  $\partial$  wie oben beschrieben wohldefiniert ist. Nehmen wir also  $x, x' \in B'$ , so dass sie das gleiche Bild unter  $p$  (im Kern von  $h$ ) haben. Dann liegt ihre Differenz im Kern von  $p$  und damit, dank Exaktheit, im Bild von  $A' \rightarrow B'$ . Nennen wir das Urbild der Differenz in  $A'$  also  $y$ . Da das linke Rechteck kommutiert, ist  $f(y)$  gerade die Differenz von  $i^{-1}(g(x))$  und  $i^{-1}(g(x'))$ . Faktorisiert man nun nach dem Bild

von  $f$  (was ja der Cokernel gerade macht), sind das also die gleichen Elemente in  $\text{coker}(f)$  und  $\partial$  ist wohldefiniert.

Weiter stellt sich die Frage, wo denn die Pfeile zwischen den Kernen bzw. Cokernen herkommen. Dies will ich zur Abwechslung rein kategorientheoretisch zeigen, also ohne von Elementen zu reden: Die Abbildung  $\ker(f) \rightarrow A' \xrightarrow{f} A$  ist Null, also auch weiter über  $A \rightarrow B$ . Das Diagramm kommutiert, also ist auch  $\ker(f) \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow B = 0$ . Die universelle Eigenschaft von  $\ker(g)$  besagt jetzt gerade, dass  $\ker(f) \rightarrow A' \rightarrow B'$  über  $\ker(g)$  faktorisiert, also dass es genau einen solchen Pfeil  $\ker(f) \rightarrow \ker(g)$  gibt. Analog die anderen.

Die Bemerkung, dass  $\ker(f) \rightarrow \ker(g)$  monisch ist, wenn es  $A' \rightarrow B'$  ist, ist offensichtlich, wenn die Pfeile Abbildungen sind (weil die Einschränkung einer injektiven Funktion injektiv bleibt). In allgemeinen abelschen Kategorien kann man das so zeigen: Sei  $k : X \rightarrow \ker(f)$  so, dass  $X \rightarrow \ker(f) \rightarrow \ker(g) = 0$ . Dank Kommutativität ist auch  $X \rightarrow \ker(f) \rightarrow \ker(g) \rightarrow B' = X \rightarrow \ker(f) \rightarrow A' \rightarrow B' = 0$ . Nun ist  $A' \rightarrow B'$  monisch, und  $\ker(f) \rightarrow A'$  (da ein Kern) monisch und kürzt sich rechts weg, und es bleibt  $X \rightarrow \ker(f) = 0$ , was zu zeigen war.

Aber auch damit sind wir nicht fertig, denn die wir behaupten ja dass die lange Sequenz exakt ist. Man sieht leicht, dass es ein Kettenkomplex ist. Etwa bei  $\ker(g)$ : Es ist  $0 = \ker(f) \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow C' = \ker(f) \rightarrow \ker(g) \rightarrow \ker(h) \rightarrow C'$  und weil  $\ker(h) \rightarrow C'$  monisch ist, ist damit auch  $\ker(f) \rightarrow \ker(g) \rightarrow \ker(h) = 0$ , und analog für  $\text{coker}(g)$ . Dass  $\ker(g) \rightarrow \ker(h) \rightarrow \text{coker}(f) = 0$  bzw.  $\ker(h) \rightarrow \text{coker}(f) \rightarrow \text{coker}(g) = 0$  ist, liegt daran, dass  $\partial$  „über“  $g$  läuft.

Zur Exaktheit bei  $\ker(g)$ . Sei nun  $x \in B'$  sowohl im Kern von  $g$  als auch von  $p$ . Wegen Exaktheit der zweiten Reihe hat  $x$  ein Urbild  $y \in A'$ .  $i(f(y)) = g(x) = 0$ , aber  $i$  ist monisch, also schon  $f(y) = 0$ . Damit liegt  $y \in \ker(f)$  und wir haben Exaktheit bei  $\ker(g)$ . Analog zeigt man die Exaktheit bei  $\text{coker}(g)$ .

Weiter sei  $x \in \ker(h)$  mit  $\partial(x) = f(x')$  für ein  $x' \in A'$ .  $p$  ist episch, also haben wir ein Urbild  $y \in B'$ . Ebenso haben wir ein Bild  $y' \in B'$  von  $x'$ . Weil  $g(y) = i(\partial(x)) = i(f(x')) = g(y')$ , ist  $(y - y') \in \ker(g)$ . Wegen  $p(y') = 0$  ist das (auch) ein Urbild von  $x$  und die Sequenz ist exakt bei  $\ker(h)$ . Wieder analog für  $\text{coker}(f)$ .

Damit wär das Schlangenlemma bewiesen. Um die Reihe vollständig zu machen, hier noch ein drittes:

**Lemma 3 (Fünferlemma)** *In einer abelschen Kategorie kommutiere das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccccc} A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow d & & \downarrow e \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \end{array}$$

und habe exakte Zeilen.

Es gilt nun:

- Sind  $b$  und  $d$  monisch und ist  $a$  episch, dann ist  $c$  monisch.

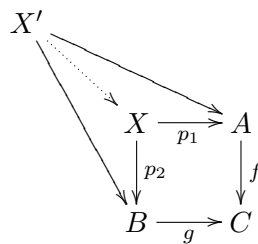
- Sind  $b$  und  $d$  episch und ist  $e$  monisch, dann ist  $c$  episch.

Und damit

- Sind  $a$ ,  $b$ ,  $d$  und  $e$  Isomorphismen, dann ist auch  $c$  ein Isomorphismus.

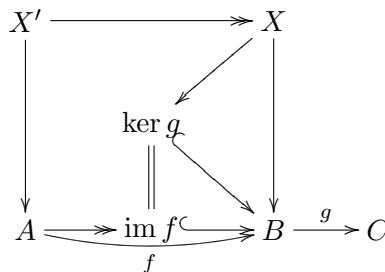
Ich will nur den ersten Fall beweisen. Um etwas zu verdeutlichen, was Exaktheit in beliebigen Abelschen Kategorien bedeutet, will ich den Beweis wieder „ohne Elemente“ führen.

**Definition 3** Ein Faserprodukt (oder, anschaulicher, „Pullback“) zu Funktionen  $f : A \rightarrow C$ ,  $g : B \rightarrow C$  ist ein  $X$  und  $p_1 : X \rightarrow A$ ,  $p_2 : X \rightarrow B$ , so dass das Diagramm kommutiert und es für jedes weitere  $X'$ , für das das Diagramm kommutiert, es einen eindeutigen Pfeil  $X' \rightarrow X$  gibt (auch wenn wir diese universelle Eigenschaft hier nicht brauchen). Solche gibt es in abelschen Kategorien immer.

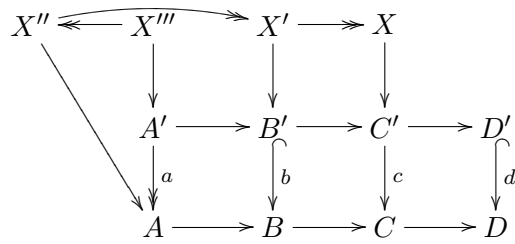


Allgemein gilt, dass wenn  $g$  ein Monomorphismus ist, dann auch  $p_1$ . Nur in manchen Kategorien, aber allen abelschen, gilt dies auch für Epimorphismen. (Siehe Mac Lane, S. 199, Proposition 2)

Schauen wir nun eine exakte Kette  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  an. Die Funktion  $A \rightarrow B$  lässt sich als  $A \rightarrow \text{im } f \rightarrow B$  schreiben, wobei  $A \rightarrow \text{im } f$  ein Epimorphismus und  $\text{im } f \rightarrow B$  ein Monomorphismus ist. Exaktheit besagt jetzt gerade, dass  $\text{im } f = \ker g$  ist! Das heißt, dass zu jedem  $X \rightarrow B$ , für welches  $X \rightarrow B \rightarrow C$  die Nullabbildung ist, wir auch als  $X \rightarrow (\ker g = \text{im } f) \rightarrow B$  schreiben können. Bilden wir jetzt das Faserprodukt entlang dem Epimorphismus  $A \rightarrow \text{im } f$ , erhalten wir ein  $X'$ , so dass das Diagramm kommutiert und insbesondere  $X' \rightarrow X$  ein Epimorphismus ist.



Mit diesem Wissen können wir uns jetzt an das Lemma wagen:



Wir gehen aus von einem Pfeil  $X \rightarrow C'$ , so dass  $X \rightarrow C' \rightarrow C$  der Nullpfeil ist, und wollen zeigen, dass schon  $X \rightarrow C'$  Null ist. Der Pfeil  $X \rightarrow D$  ist Null (egal wie rum), und  $d$  ist ein Monomorphismus, also ist schon  $X \rightarrow D'$  Null. Die Reihe ist exakt, und wir erhalten (wie oben gezeigt) die Pfeile ab  $X'$ , so dass das kommutiert und  $X' \rightarrow X$  ein Epimorphismus ist. Von  $X' \rightarrow C$  ist es die Nullabbildung, jetzt verwenden wir die Exaktheit bei  $B$ , um  $X''$  samt Pfeilen zu erhalten. Nun ist  $a$  schon selbst ein Epimorphismus, wir können also den Pfeil  $X'' \rightarrow A$  nach  $A'$  zurückziehen und bekommen  $X'''$ . Hier darf uns das Diagramm nicht täuschen: Die Kommutativität des Kästchen oben links ( $A', B', X', X'', X'''$ ) muss gezeigt werden: Aber  $X''' \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow B = X''' \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow B = X''' \rightarrow X'' \rightarrow A \rightarrow B = X''' \rightarrow X'' \rightarrow X' \rightarrow B' \rightarrow B$ , und  $B' \rightarrow B$  ist monisch, also gilt  $X''' \rightarrow A' \rightarrow B' = X''' \rightarrow X'' \rightarrow X' \rightarrow B'$ . Jetzt sieht man, dass  $X''' \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow C'$  die Nullabbildung ist, also auch  $X''' \rightarrow X'' \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow C'$ . Davon sind aber die ersten drei Pfeile Epimorphismen und fallen weg, es bleibt, dass  $X' \rightarrow C'$  der Nullpfeil ist – was zu zeigen war.

Wer den Beweis für das Fünferlemma schon mal mit „elementarer“ Diagrammjagd gesehen hat, dem wird die Vorgehensweise bekannt vorkommen. Das ist kein Zufall, denn man kann (nach geeigneter Äquivalenzklassenbildung) die „Pfeile nach  $X$ “ genau so über das Diagramm jagen, wie „Elemente von  $X$ “, indem man die Handvoll nötiger Rechenregeln (Addieren, Injektivität, Surjektivität, Subtraktion) für diese Element-Ersätze in abelschen Kategorien beweist (Siehe Mac Lane, S. 200, Theorem 3).

Eine andere Möglichkeit, das Rechnen mit Elementen in beliebigen abelschen Kategorien zu rechtfertigen liefert der Einbettungssatz von Freyd-Mitchell: Man kann jede kleine abelsche Kategorie als Unterkategorie von  $R\text{-mod}$  (für geeignetes  $R$ ) betrachten. Daher gilt auch das Schlangenlemma (bis auf die Aussage zur Konstruktion von  $\partial$  in beliebigen abelschen Kategorien). Bevor wir dazu kommen, sollte ich aber noch die langen exakten Sequenzen abschließen.

Wir haben jetzt also eine exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0.$$

Betrachten wir das Diagramm (erst die mittleren zwei Zeilen malen, dann die Kerne und Cokerne dazu und erwähnen, dass sie solche sind. Pfeil in den äußeren Zeilen erst später

einzeichnen.)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & Z_n(A) & \longrightarrow & Z_n(B) & \longrightarrow & Z_n(C) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & C_n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\
 0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \longrightarrow & B_{n-1} & \longrightarrow & C_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \frac{A_{n-1}}{dA_n} & \longrightarrow & \frac{B_{n-1}}{dB_n} & \longrightarrow & \frac{C_{n-1}}{dC_n} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Der mittleren zwei Reihen bieten es an, das Schlangenlemma anzuwenden. Wir wollen zwar hier noch nicht das  $\partial$ , aber wir erhalten die Exaktheit der oberen und unteren Zeile. Diese bauen wir jetzt andersrum zusammen, um dieses Diagramm zu erhalten:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \frac{A_n}{dA_{n+1}} & \longrightarrow & \frac{B_n}{dB_{n+1}} & \longrightarrow & \frac{C_n}{dC_{n+1}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\
 0 & \longrightarrow & Z_{n-1}(A) & \xrightarrow{f} & Z_{n-1}(B) & \xrightarrow{g} & Z_{n-1}(C)
 \end{array}$$

Jetzt wenden wir auf dieses Diagramm nochmal das Schlangenlemma an. Dazu müssen wir Kern und Cokern der vertikalen Pfeile kennen. Der Kern ist gerade  $\ker d/d(A_{n+1}) = H_n(A)$ , und der Cokern ist  $Z_{n-1}/d(A_n) = H_{n-1}(A)$  und wir erhalten, wie gewünscht, die lange exakte Sequenz:

$$H_n(A) \xrightarrow{f} H_n(B) \xrightarrow{g} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{f} H_{n-1}(B) \xrightarrow{g} H_{n-1}(C)$$

Diese Sequenz wird dann richtig lang, wenn man links und rechts wieder mit  $\partial$  weitermacht...

Wir haben jetzt also eine Konstruktion, die aus einer kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen in  $\mathcal{A}$  eine lange exakte Sequenz von  $\mathcal{A}$  baut. Das wäre keine Kategorientheorie wenn wir daraus nicht einen Funktor machen würden:

**Definition 4** Sei also  $\mathcal{S}$  die Kategorie der kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen



in  $\mathcal{A}$ . Morphismen in dieser Kategorie sind so etwas hier:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Und  $\mathcal{L}$  ist die Kategorie der langen exakten Sequenzen in  $\mathcal{A}$ , mit Morphismen analog definiert.

**Satz 2** Die lange exakte Sequenz ist ein Funktor von  $\mathcal{S}$  nach  $\mathcal{L}$ . Insbesondere gibt es für jeden Pfeil in  $\mathcal{S}$  ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial} & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \xrightarrow{\partial} & H_n(A') & \longrightarrow & H_n(B') & \longrightarrow & H_n(C') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A') \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Wir müssen nun die Kommutativität des Diagramms zeigen. Die beiden linken Kästchen folgen daraus, dass  $H_n$  ein Funktor ist, das rechte Kästchen zeigt man durch eine weitere Diagrammjagd, unter Verwendung von der Konstruktion von  $\partial$ , die dich uns hier erspare.

## Freyd-Mitchell-Einbettung

Kommen wir nun zum letzten Teil des Vortrags. Ziel ist es, den Freyd-Mitchell-Einbettungssatz vorzustellen und zu motivieren – ein vollständiger Beweis würde hier den Rahmen sprengen. Auf dem Weg gibt es dann noch ein paar frische kategorientheoretische Vokabeln dazu.

**Satz 3 (Freyd-Mitchell-Einbettungssatz)** Zu jeder kleinen abelschen Kategorie  $\mathcal{A}$  gibt es einen Ring  $R$  und einen exakten, volltreuen Funktor von  $\mathcal{A}$  in nach  $R\text{-mod}$ , der  $\mathcal{A}$  als volle Unterkategorie in  $R\text{-mod}$  einbettet.

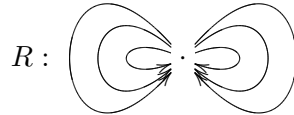
**Definition 5** Zur Erinnerung: Ein ko(ntra)varianter Funktor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  heißt

- treu, wenn  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), F(B))$  ( $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(B), F(A))$ ) injektiv ist.
- voll, wenn  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), F(B))$  ( $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(B), F(A))$ ) surjektiv ist.
- volltreu, wenn er beides ist.
- linksexakt, wenn aus  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$  exakt folgt, dass  $0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C)$  ( $0 \rightarrow F(C) \rightarrow F(B) \rightarrow F(A)$ ) exakt ist.
- rechtsexakt, wenn aus  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  exakt folgt, dass  $F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow 0$  ( $F(C) \rightarrow F(B) \rightarrow F(A) \rightarrow 0$ ) exakt ist.
- exakt, wenn er beides ist.

Um die Konstruktion für den Satz nachvollziehen zu können, brauchen wir die Funktorkategorien:

**Definition 6 (Funktorkategorie)** Seien  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  beliebige Kategorien. Die Funktorkategorie  $\mathcal{C}^{\mathcal{B}}$  ist die Kategorie mit Funktoren  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  als Objekten und natürlichen Transformationen als Morphismen. Ist  $\mathcal{C}$  abelsch, so auch  $\mathcal{C}^{\mathcal{B}}$ .

Ein Beispiel für eine bekannte Kategorie, die sich als Funktorkategorie darstellen lässt, ist die Kategorie  $R\text{-mod}$ . Sie entspricht der Funktorkategorie  $\mathbf{Ab}^R$ , wobei der Ring  $R$  als abelsche Kategorie mit einem Objekt und den Elementen des Rings als Morphismen aufgefasst wird.



Weiter muss ich an ein Ergebnis erinnern, dass wir schon in Algebra II für  $R\text{-mod}$  kennen gelernt habe, aber auch in allgemeinen abelschen Kategorien gilt:

Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie. Dann ist für jedes  $M \in \mathcal{A}$  der Funktor  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \cdot)$  von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathbf{Ab}$  linksexakt. Analog ist  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot, M)$  ein linksexakter kontravarianter Funktor.

Die erste Aussage auf dem Weg zu dem Einbettungssatz ist die Yoneda-Einbettung, die man auch noch allgemeiner als nur für abelsche Kategorien formulieren könnte:

**Satz 4 (Yoneda-Einbettung)** Sei  $\mathcal{A}$  eine abelsche Kategorie. Der Funktor  $h: \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}^{\mathcal{A}^{op}}$ , mit  $h_A = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot, A)$  ist eine linksexakte, volltreue Einbettung.

Wir haben also schon eine Einbettung. Zum Freyd-Mitchell-Satz fehlt noch, dass die Einbettung exakt ist und in der richtigen Kategorie landet. Sei  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz in  $\mathcal{A}$  und  $M \in \mathcal{A}$ . Wir wissen aus Algebra II, dass die Sequenz

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, C)$$

im Allgemeinen nicht rechts exakt ist. Daher erweitern wir sie mit der abelschen Gruppe  $W(A)$ , die der Kokernel des letzten Pfeils ist:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, C) \rightarrow W(M) \rightarrow 0$$

Mit dieser Vorschrift erhalten wir einen kontravarianten Funktor  $W$  und die exakte Sequenz von Funktoren in  $\mathbf{Ab}^{\mathcal{A}^{op}}$

$$0 \rightarrow h_A \rightarrow h_B \rightarrow h_C \rightarrow W \rightarrow 0. \tag{*}$$

Der Funktor  $W$  ist dabei ein *schwach auslöschbarer* Funktor:

**Definition 7** Ein Funktor  $W: \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$  heißt schwach auslöschbar, wenn für alle  $M \in \mathcal{A}$  und  $x \in W(M)$  gilt: Es gibt einen Epimorphismus  $p: P \rightarrow M$  in  $\mathcal{A}$ , so dass  $W(p)(x) = 0$ .

Wir bezeichnen mit  $\mathcal{L}$  die abelsche Unterkategorie aller links-exakten kontravarianten Funktoren  $\mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$ . Die schwach auslöschbaren Funktoren bilden auch eine Unterkategorie  $\mathcal{W}$

von  $\mathbf{Ab}^{A^{op}}$ , deren Quotientenkategorie (ohne jetzt darauf einzugehen, was das genau bedeutet) gerade  $\mathcal{L}$  ist. Das heißt insbesondere, dass es einen Funktor  $R : \mathbf{Ab}^{A^{op}} \rightarrow \mathcal{L}$  gibt, so dass  $R(L) = L$  für jedes linksexakte  $L$  gilt und  $R(W) \cong 0$  genau dann, wenn  $W$  schwach auslöschar ist.

Wendet man diesen Funktor nun auf die exakte Sequenz  $(*)$  an, erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow h_A \rightarrow h_B \rightarrow h_C \rightarrow 0.$$

die jetzt in der Kategorie  $\mathcal{L}$  zu verstehen ist. In diesem Sinne ist die Yoneda-Einbettung exakt.

Nun wollen wir die Objekte von  $\mathcal{L}$  als Moduln über einem Ring auffassen. Dazu haben andere festgestellt, dass  $\mathcal{L}$  beliebige Koprodukte sowie ein *treues projektives Objekt*  $P$  enthält.

**Definition 8 (Projektives Objekt)** Ein Objekt  $P$  heißt projektiv, wenn es für jeden Epimorphismus  $f : A \rightarrow B$  und jeden Morphismus  $g : P \rightarrow B$  einen Morphismus  $\tilde{g} : P \rightarrow A$  mit  $g = f \circ \tilde{g}$  gibt.

– auch ein Konzept, dass uns in Algebra II begegnet ist. Dann ist jede kleine volle abelsche Unterkategorie von  $\mathcal{L}$  äquivalent zur einer vollen abelschen Unterkategorie von  $R\text{-mod}$  mit dem Ring  $R = \text{Hom}_{\mathcal{L}}(P, P)$ .

Damit habe ich die Vorgehensweise beim Beweis des Freyd-Mitchell-Einbettungssatzes fertig skizziert, mit dem Ziel, eine leichte Ahnung der dahinterstehenden Konstruktion zu vermitteln. Um aber nicht ganz so vage aufhören zu müssen, kommt jetzt noch ein kurzes Beispiel:

Die abelsche Kategorie der Kettenkomplexe von  $R$ -Modulen kann äquivalent in  $S\text{-mod}$  eingebettet werden, wobei

$$S = \left( \prod_{i \in \mathbb{Z}} R \right) [d] / (d^2 = 0, \{dr = rd\}_{r \in R}, \{de_i = e_{i-1}d\}_{i \in \mathbb{Z}})$$

und  $e_i$  der  $i$ -te Einheitsvektor in  $\prod_{i \in \mathbb{Z}} R$  ist. Die Konstruktion lässt sich so erklären: Wir wollen Elemente des Rings an jeder Stelle der Kette draufmultiplizieren können, brauchen also eine Kopie von  $R$  pro Position. Weiter brauchen wir als zusätzliche Operation den Randoperator, den wir zu dem Ring dazuadjungieren. Für diesen muss gelten, dass  $d \cdot d = 0$  ist, dass er linear ist und dass er in der Kette „eins runter“ abbildet, in dem Sinne, dass der Wert, der vorher an der  $i$ -ten Stelle der Kette stand, nach der Multiplikation mit  $d$  an der  $(i - 1)$ -ten Stelle zu finden ist.

## Quellen

- Charles A. Weibel, An introduction to homological algebra.
- Saunders Mac Lane, Categories for the working mathematician.
- <http://planetmath.org/encyclopedia/ProofOfSnakeLemma.html>