

Spaltende Kettenkomplexe, Zylinder und Kegel

Tobias Columbus

25. November 2008

Kettenkomplexe seien hier stets Kettenkomplexe von R -Moduln. Abbildungen seien Morphismen in der entsprechenden Kategorie.

1 Spaltende Kettenkomplexe und Homotopien

Satz und Definition 1

Sei C ein Kettenkomplex mit Zykeln Z_n und Rändern B_n . Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) Es gibt Abbildungen $s_n : C_n \rightarrow C_{n+1}$, so dass $dsd = d$
- (ii) Es gibt R -Moduln B'_n, H'_n , so dass $C_n \simeq Z_n \oplus B'_n$ und $Z_n \simeq B_n \oplus H'_n$

Erfüllt C eine der Bedingungen, so heißt C *spaltend*. Die Abbildungen s aus (i) heißen *spaltende Abbildungen*. Ist C azyklisch und spaltend, so heißt C auch *exakt spaltend*.

Beweis

„(ii) \Rightarrow (i)“: Über die Zerlegungen von $C_n \simeq Z_n \oplus B'_n$ und $Z_n \simeq B_n \oplus H'_n$ erhält man natürlicherweise Abbildungen

$$s_n : C_n \longrightarrow Z_n \longrightarrow B_n \xrightarrow{\simeq} d(C_{n+1}) \xrightarrow{\simeq} B'_{n+1} \hookrightarrow C_{n+1}$$

Für diese Abbildungen gilt $d = dsd$, da für $x \in d(C_{n+1})$ $s_n(x)$ ein weiteres Urbild von x bzgl. d ist.

„(i) \Rightarrow (ii)“: Die Abbildungen ds und sd sind Projektionen und daher erhält man Zerlegungen

$$C_n = \text{im}(ds) \oplus \ker(ds) \quad \text{und} \quad C_n = \text{im}(sd) \oplus \ker(sd)$$

Weiterhin ist $Z_n = \ker(d) = \ker(ds) \supset \ker(sd) \supset \ker(d)$ und somit hat man $C_n = Z_n \oplus B'_n$ für $B'_n := \text{im}(sd)$. Ausserdem ist $\text{im}(ds) \subset \ker(sd) = Z_n$ und man kann Z_n zerlegen in

$$Z_n = \text{im}(ds) \oplus (\ker(sd) \cap \ker(ds))$$

Nun ist $B_n = \text{im}(d) = \text{im}(dsd) \subset \text{im}(ds) \subset \text{im}(d)$ und für $H'_n := \ker(sd) \cap \ker(ds)$ hat man die gewünschten Zerlegungen. \square

Bemerkung 2

Ist C spaltend, so ist offenbar $H_n(C) \simeq H'_n$.

Beispiel

- (a) Jeder azyklische, von unten beschränkte Kettenkomplex von freien R -Moduln ist exakt spaltend.
- (b) Jeder azyklische Kettenkomplex von freien abelschen Gruppen ist exakt spaltend.
- (c) Der Komplex

$$\dots \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \dots$$

ist azyklisch, aber nicht spaltend.

Beweis

- (a) Sei

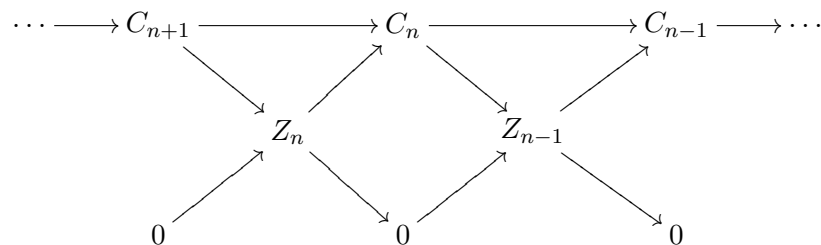
$$\dots \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$$

ein azyklischer Komplex von freien R -Moduln.

Induktion nach n :

$n = 0$: Offenbar ist $C_0 = Z_0 \oplus 0$.

$n > 0$: Für $n > 0$ kann man die Zyklen Z_n folgendermaßen in das Diagramm einzeichnen:



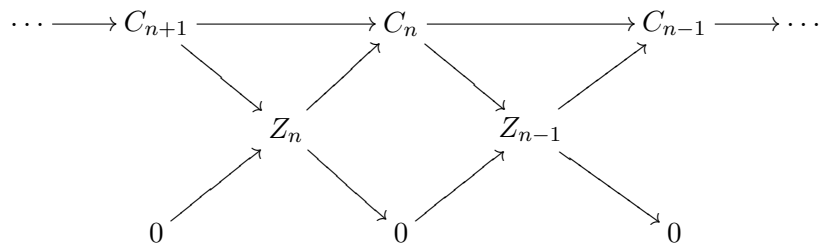
Die Sequenz

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \longrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow 0$$

ist exakt, da C azyklisch ist. Nun gilt nach Induktionsvoraussetzung bereits $C_{n-1} = Z_{n-1} \oplus Z_{n-2}$, also ist Z_{n-1} direkter Summand eines freien Moduls, somit projektiv und daher ist die obige kurze exakte Sequenz spaltend und man erhält

$$C_n \simeq Z_n \oplus Z_{n-1}$$

- (b) Ist C ein azyklischer Komplex von freien abelschen Gruppen, so kann man erneut die n -Zykel in das Diagramm eintragen:



Die Sequenz

$$0 \longrightarrow Z_n \longrightarrow C_n \longrightarrow Z_{n-1} \longrightarrow 0$$

ist wieder exakt. Nun ist jede Untergruppe einer freien abelschen Gruppe, also insbesondere Z_{n-1} erneut frei, somit projektiv und daher ist die obige Sequenz spaltend, d.h.

$$C_n \simeq Z_n \oplus Z_{n-1}$$

- (c) In der Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \cdots$$

ist offenbar $Z_n = \{0, 2\}$ und offenbar gibt es kein \mathbb{Z} -Modul M , das eine Zerlegung von $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \simeq Z_n \oplus M$ zulässt. \square

Definition 3

Seien $f, g : C \rightarrow D$ Abbildungen zwischen Kettenkomplexen.

- (a) f und g heißen *homotop* zueinander, falls es Abbildungen $s_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$ gibt, so dass $f - g = ds + sd$. Die Abbildungen s heißen *Homotopie* von f nach g .
- (b) f heißt *null-homotop*, falls f homotop zu 0 ist. In diesem Fall nennt man eine Homotopie von f nach 0 auch *Kontraktion* von f .
- (c) f heißt *Homotopieäquivalenz*, falls es eine Abbildung $h : D \rightarrow C$ gibt, so dass fh homotop zu id_D und hf homotop zu id_C sind.

Bemerkung 4

Diese Namensgebung ist kein Zufall, sondern entspringt der Topologie. erinnert man sich an den Vortrag über simpliziale und singuläre Homologie zurück, dann wurde dort mit Hilfe einer „Prismenabbildung“ $P : C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$ gezeigt, dass zwei topologisch homotope Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ dieselben Homomorphismen auf der singulären Homologie induzieren. Diese „Prismenabbildung“ war, wie sich jetzt herausstellt, der Prototyp einer Homotopie von Kettenkomplexabbildungen. Das nächste Lemma ist also nur eine Wiederholung eines schon bekannten Sachverhaltes.

Lemma 5

Sind $f, g : C \rightarrow D$ homotop zueinander, so induzieren f und g dieselben Abbildungen $f_* = g_* : H_n(C) \rightarrow H_n(D)$.

Beweis

Es genügt zu zeigen, dass null-homotope Abbildungen $f : C \rightarrow D$ stets Nullabbildungen $f_* : H_n(C) \rightarrow H_n(D)$ induzieren. Seien $s_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$ die Kontraktion von f und sei weiter $x \in Z_n \subset C_n$ ein n -Zykel. Dann ist $f(x) = ds(x) + sd(x) = ds(x) \in B_n \subset D_n$, also ist $f_*(x) = 0$. \square

Lemma 6

Ein Kettenkomplex C ist genau dann exakt spaltend, wenn id_C null-homotop ist.

Beweis

„ \Rightarrow “: Ist C exakt spaltend mit spaltenden Abbildungen s , so hat man folgende Zerlegungen von C_n :

$$C_n = \text{im}(ds) \oplus \ker(ds)$$

$$C_n = \ker(sd) \oplus \text{im}(sd)$$

Weiter ist $\ker(ds) \cap \ker(sd) = H_n(C) = 0$ und daher

$$\begin{array}{ccc} C_n = \text{im}(ds) & \oplus & \ker(ds) \\ & \parallel & \parallel \\ & \ker(sd) & \oplus & \text{im}(sd) \end{array}$$

und somit offenbar $id_C = ds + sd$.

„ \Leftarrow “: Ist id_C null-homotop mit Kontraktion s , dann ist

$$d = d \circ id = d(ds + sd) = d^2s + dsd = dsd$$

und somit ist C spaltend. Für ein $x \in Z_n$ ist

$$x = ds(x) + \underbrace{sd(x)}_{=0} \in B_n$$

\square

also ist $B_n = Z_n$, mit anderen Worten, C ist azyklisch.

Bemerkung 7

Betrachtet man das obige Lemma aus der Sicht der Topologie, so ist es sehr bemerkenswert, denn id_C ist für einen Kettenkomplex $C(X)$ eines topologischen Raumes genau dann null-homotop, wenn der Raum X kontrahierbar ist. Also besagt das Lemma, dass der Kettenkomplex $C(X)$ eines topologischen Raumes X genau dann exakt spaltend ist, falls X kontrahierbar ist.

Satz 8

Es gibt eine additive Kategorie \mathcal{K} , deren Objekte Kettenkomplexe und deren Morphismen Äquivalenzklassen von homotopen Abbildungen sind. Der natürliche Funktor $F : \mathcal{CH} \rightarrow \mathcal{K}$ ist ein additiver Funktor.

Beweis

Es ist offensichtlich, dass Homotopie eine Äquivalenzrelation auf $\text{Hom}_{\mathcal{CH}}(A, B)$ ist. Sei nun \mathcal{K} die Kategorie mit Kettenkomplexen als Objekten und Homotopieklassen als Morphismen. Nun sind für zwei homotope Abbildungen $f, g : A \rightarrow B$ mit Homotopie s und für beliebige Kettenkomplexabbildungen $u : X \rightarrow A, v : B \rightarrow Y$ auch vf_u und vgu homotop mit Homotopie vsu :

$$vf_u - vgu = v(f - g)u = v(ds + sd)u = vdsu + vsdu = dvsu + vsud$$

Also ist die Komposition $[f] \circ [g] = [f \circ g]$ in \mathcal{K} wohldefiniert. Weiter bilden die null-homotopen Abbildungen $N(A, B)$ von A nach B eine Untergruppe von $\text{Hom}_{\mathcal{CH}}(A, B)$ und offenbar ist $\text{Hom}_{\mathcal{CH}}(A, B)/\text{Homotopie} = \text{Hom}_{\mathcal{CH}}(A, B)/N(A, B)$. Somit erhält man natürlicherweise auch eine Gruppenstruktur auf $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(A, B)$ und \mathcal{K} ist eine Ab-Kategorie, da die Distributivgesetze von \mathcal{CH} geerbt werden. Der natürliche Funktor $F : \mathcal{CH} \rightarrow \mathcal{K}$ ist eingeschränkt auf die einzelnen Morphismenmengen nun offenbar die Projektion $\text{Hom}_{\mathcal{CH}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{CH}}(A, B)/N(A, B)$, also ein Gruppenhomomorphismus und daher ein additiver Funktor. Da die Morphismenmengen durch die Quotientenbildung nur „kleiner“ werden und niemals ganz verschwinden, bleibt das Nullobjekt aus \mathcal{CH} auch Nullobjekt in \mathcal{K} . Mit derselben Begründung lassen sich auch endliche Produkte aus \mathcal{CH} in \mathcal{K} recyceln und somit ist \mathcal{K} eine additive Kategorie. \square

Bemerkung 9

\mathcal{K} ist keine abelsche Kategorie.

Bemerkung 10

Die Kategorie \mathcal{K} ist zur Untersuchung von Homologie interessant, da der Funktor H_n über \mathcal{K} faktorisiert und dort interessante Eigenschaften hat:

1. Zwei homotope Abbildungen f, g induzieren dieselben Abbildungen f_*, g_* auf den Homologiemoduln, also ist $H_n([f])$ wohldefiniert.
2. Homotopie-Äquivalenzen in \mathcal{CH} sind Isomorphismen in \mathcal{K} .
3. id_C ist für exakt spaltende Kettenkomplexe C null-homotop, also ist für beliebige Abbildungen $f : X \rightarrow C$ und $g : C \rightarrow Y$

$$[f] = [id_C \circ f] = [id_C] \circ [f] = [0] \circ [f] = [0]$$

und

$$[g] = [g \circ id_C] = [g] \circ [id_C] = [g] \circ [0] = [0]$$

und somit C Nullobjekt in \mathcal{K} .

Übersetzt man diesen Sachverhalt zurück in die Topologie, so erhält man

1. Topologische Homotopieäquivalenzen induzieren Isomorphismen in \mathcal{K}
2. Kontrahierbare Räume induzieren Nullobjekte in \mathcal{K}

2 Kegel

Definition 11

Ist $f : B \rightarrow C$ eine Abbildung zwischen Kettenkomplexen, dann heißt der Kettenkomplex

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & B_n & \xrightarrow{-d} & B_{n-1} & \xrightarrow{-d} & B_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \oplus & \searrow^{-f} & \oplus & \searrow^{-f} & \oplus & & \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d} & C_n & \xrightarrow{d} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

dessen n -ter Teil $B_{n-1} \oplus C_n$ ist, *Abbildungskegel* von f und wird mit $\text{cone}(f)$ bezeichnet. Für einen Kettenkomplex C bezeichnet man mit $\text{cone}(C)$ auch $\text{cone}(id_C)$. Man kann das Differential d in $\text{cone}(f)$ auch schreiben als

$$\begin{bmatrix} -d_B & 0 \\ -f & d_C \end{bmatrix}$$

denn wendet man das Differential von $\text{cone}(f)$ auf ein Element (b, c) an, dann entspricht das der Multiplikation der Matrix mit dem Vektor $(b, c)^t$

Bemerkung 12

- (a) $\text{cone}(C)$ ist exakt spaltend.
- (b) $f : B \rightarrow C$ ist genau dann null-homotop, falls sich f zu einer Abbildung $(-s, f) : \text{cone}(B) \rightarrow C$ fortsetzen lässt.

Beweis

- (a) Die Abbildungen

$$s_n : C_{n-1} \oplus C_n \rightarrow C_n \oplus C_{n+1}, (a, b) \mapsto (-b, 0)$$

erfüllen $d = dsd$:

$$dsd(a, b) = ds(-d(a), d(b) - a) = d(a - d(b), 0) = (-d(a), d(b) - a)$$

Somit ist $\text{cone}(C)$ spaltend, die Exaktheit bekommt man durch „Liften“ eines $(c, c') \in Z_n$: Ist $(c, c') \in Z_n$, so muss $d(c) = 0$ und $-c = d(c')$ sein und daher ist

$$d(-c', 0) = (-d(c'), c') = (c, c')$$

- (b) Ohne Beweis □

Lemma 13

Sei $f : B \rightarrow C$ eine Abbildung zwischen Kettenkomplexen, dann gibt es zwei Abbildungen i und δ , die folgende Sequenz exakt machen:

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{i} \text{cone}(f) \xrightarrow{\delta} B[-1] \longrightarrow 0$$

Beweis

Als Abbildung $i : C \rightarrow \text{cone}(f)$ wählt man die Inklusion $c \mapsto (0, c)$, die Abbildung $\delta : \text{cone}(f) \rightarrow B[-1]$ ist dann $(b, c) \mapsto -b$. \square

Satz 14

Für jede Abbildung $f : B \rightarrow C$ von Kettenkomplexen gibt es eine lange exakte Sequenz von Homologiemoduln

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(\text{cone}(f)) \longrightarrow H_n(B) \xrightarrow{f_*} H_n(C) \longrightarrow H_n(\text{cone}(f)) \longrightarrow \cdots$$

Beweis

Die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{i} \text{cone}(f) \xrightarrow{\delta} B[-1] \longrightarrow 0$$

induziert eine lange exakte Sequenz von Homologiemoduln

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(B[-1]) \xrightarrow{\partial} H_n(C) \xrightarrow{i_*} H_n(\text{cone}(f)) \xrightarrow{\delta_*} H_n(B[-1]) \longrightarrow \cdots$$

Nun kann man zeigen, dass der Verbindungshomomorphismus ∂ tatsächlich f_* ist.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{i} & B_n \oplus C_{n+1} & \xrightarrow{\delta} & B_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow d & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_n & \xrightarrow{i} & B_{n-1} \oplus C_n & \xrightarrow{\delta} & B_{n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Ist $b \in B_n$ ein Zykel, dann kann man b liften zu $(-b, 0) \in B_n \oplus C_{n+1}$. Wendet man nun das Differential von $\text{cone}(f)$ auf den Lift von b an, so erhält man $(d(b), f(b))$, wobei $d(b) = 0$. Der Verbindungshomomorphismus ∂ ist im Endeffekt die von der Komposition $i^{-1} \circ d \circ \delta^{-1}$ induzierte Abbildung auf den Homologiemoduln und daher ist klar, dass

$$\partial([b]) = [fb] = f_*([b])$$

wobei $[\cdot]$ die Klassen in $H_n(\cdot)$ bezeichnen soll. \square

Korollar

Eine Abbildung $f : B \rightarrow C$ ist genau dann ein Quasi-Isomorphismus, wenn $\text{cone}(f)$ azyklisch ist.

Beweis

Die lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(\text{cone}(f)) \xrightarrow{\delta_*} H_{n+1}(B[-1]) \xrightarrow{f_*} H_n(C) \xrightarrow{i_*} H_n(\text{cone}(f)) \xrightarrow{\delta_*} \cdots$$

impliziert genau diese Äquivalenz, denn ist $\text{cone}(f)$ azyklisch, so ist $H_n(\text{cone}(f)) = 0$ und somit f_* ein Isomorphismus und ist umgekehrt f_* ein Isomorphismus, dann ist $\delta_* = 0 = i_*$ und somit $H_n(\text{cone}(f)) = 0$. \square

3 Zylinder

Definition 15

Ist $f : B \rightarrow C$ eine Abbildung zwischen Kettenkomplexen, dann heißt der Kettenkomplex

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{d} & B_n & \xrightarrow{d} & B_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \oplus & \nearrow \text{id} & \oplus & \nearrow \text{id} & \oplus & & \\
 \cdots & \longrightarrow & B_n & \xrightarrow{-d} & B_{n-1} & \xrightarrow{-d} & B_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \oplus & \searrow -f & \oplus & \searrow -f & \oplus & & \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d} & C_n & \xrightarrow{d} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

dessen n -ter Teil $B_n \oplus B_{n-1} \oplus C_n$ ist, *Abbildungszylinder* von f und wird mit $\text{cyl}(f)$ bezeichnet. Für einen Kettenkomplex C bezeichnet man mit $\text{cyl}(C)$ auch $\text{cyl}(\text{id}_C)$.

Bemerkung 16

Seien $f, g : B \rightarrow C$ eine Abbildungen zwischen Kettenkomplexen. f und g sind genau dann homotop zueinander, wenn sie sich zu einer Abbildung $(f, s, g) : \text{cyl}(B) \rightarrow C$ fortsetzen lassen.

Beweis

Ohne Beweis \square

Lemma 17

Sei $f : B \rightarrow C$ eine Abbildung zwischen Kettenkomplexen.

- (a) Der Unterkomplex der Elemente $(0, 0, c)$ von $\text{cyl}(f)$ ist isomorph zu C , die zugehörige Inklusion $\alpha : C \rightarrow \text{cyl}(f)$ ist ein Quasi-Isomorphismus.
- (b) Die Inklusion α ist eine Homotopieäquivalenz, die „Homotopie-Inverse“ ist gegeben durch $\beta : \text{cyl}(f) \rightarrow C, (b, b', c) \mapsto f(b) + c$

Beweis

- (a) Die Isomorphie von C und dem Unterkettenkomplex der Elemente $(0, 0, c)$ in $cyl(f)$ ist klar. Aus der Definition von $cyl(f)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{d} & B_n & \xrightarrow{d} & B_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \oplus & \nearrow id & \oplus & \nearrow id & \oplus & & \\
 \cdots & \longrightarrow & B_n & \xrightarrow{-d} & B_{n-1} & \xrightarrow{-d} & B_{n-2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \oplus & \searrow -f & \oplus & \searrow -f & \oplus & & \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d} & C_n & \xrightarrow{d} & C_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

kann man weiter sehen, dass der Faktorkettenkomplex $cyl(f)/\alpha(C)$ isomorph zu $cone(-id_B)$ ist. Insgesamt ist also die folgende Sequenz exakt:

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\alpha} cyl(f) \longrightarrow cone(-id_B) \longrightarrow 0$$

Man erhält nun eine lange exakte Sequenz von Homologiemoduln

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(cone(-id_B)) \longrightarrow H_n(C) \xrightarrow{\alpha_*} H_n(cyl(f)) \longrightarrow H_n(cone(-id_B)) \longrightarrow \cdots$$

Nun ist aber $cone(-id_B)$ exakt spaltend, d.h. insbesondere $H_n(cone(-id_B)) = 0$ und daher ist

$$0 \longrightarrow H_n(C) \xrightarrow{\alpha_*} H_n(cyl(f)) \longrightarrow 0$$

exakt, also ist α_* ein Isomorphismus.

- (b) Man kann nachrechnen, dass die Abbildung β eine Kettenkomplexabbildung ist. Für β gilt nun

$$\beta\alpha(c) = \beta(0, 0, c) = f(0) + c = c$$

und daher ist offenbar $\beta\alpha$ homotop zu id_C . Um zu zeigen, dass $\alpha\beta$ homotop zu $id_{cyl(f)}$ kann man die Abbildungen $B_n \oplus B_{n-1} \oplus C_n \rightarrow B_{n+1} \oplus B_n \oplus C_{n+1}$ mit $(b, b', c) \mapsto (0, b, 0)$ als Homotopie zwischen $id_{cyl(f)}$ und $\alpha\beta$ wählen. \square

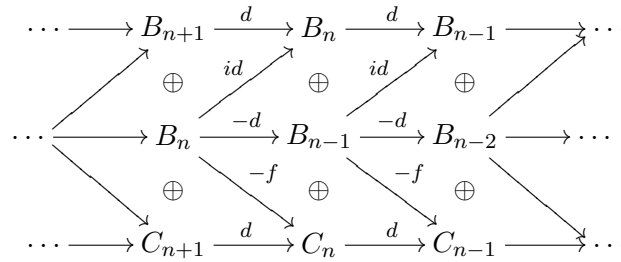
Lemma 18

Ist $f : B \rightarrow C$ eine Abbildung von Kettenkomplexen, dann gibt es zwei Abbildungen $j : B \rightarrow cyl(f)$ und $p : cyl(f) \rightarrow cone(f)$, für die die folgende Sequenz exakt ist.

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{j} cyl(f) \xrightarrow{p} cone(f) \longrightarrow 0$$

Beweis

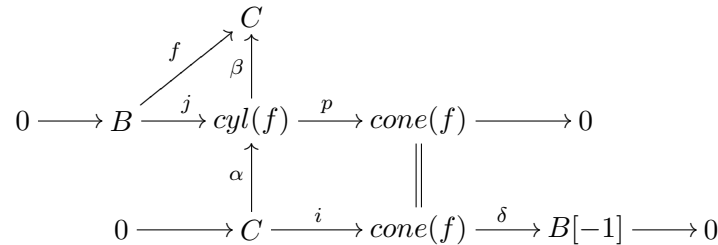
Die Abbildung $j : B \rightarrow \text{cyl}(f)$ kann als Inklusion $b \mapsto (b, 0, 0)$ gewählt werden. Betrachtet man die Definition von $\text{cyl}(f)$



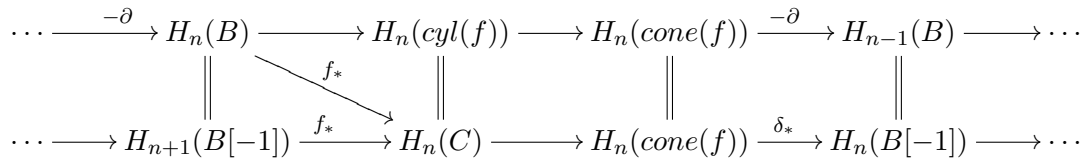
Nun erkennt man, dass $\text{cyl}(f)/j(B)$ isomorph zu $\text{cone}(f)$ ist und daher kann p als Projektion $p : \text{cyl}(f) \rightarrow \text{cyl}(f)/j(B)$ gewählt werden und die Sequenz ist natürlicherweise exakt. \square

Satz 19

Das folgende Diagramm hat exakte Zeilen und kommutiert



Die Homologiesequenzen passen in folgendes kommutatives Diagramm:



Beachte, dass anstatt dem Verbindungshomomorphismus ∂ in der oberen Zeile $-\partial$ verwendet wird! Die Exaktheit der Sequenzen ist davon jedoch nicht betroffen.

Beweis

Die beiden Zeilen sind bereits als exakt bekannt. Das Dreieck kommutiert wegen der Definition von β . Das Rechteck kommutiert, weil p auf $\alpha(C)$ offenbar die Identität ist und somit $p\alpha = i$. Für die Homologiesequenzen gilt nun folgendes: Wegen der Funktorialität von $H_n(\cdot)$ kommutieren die zwei linken Rechtecke des gezeigten Ausschnitts. Es bleibt also nur die Kommutativität des rechten Teils zu zeigen.

Sei dazu (b, c) ein n -Zykel in $\text{cone}(f)$, also $d(b) = 0$ und $d(c) = f(b)$. Man kann (b, c) zu einem Element $(0, b, c)$ in $\text{cyl}(f)$ liften und nach Anwendung des Differentials in $\text{cyl}(f)$ erhält man

$$d(0, b, c) = (0 + b, -d(b), d(c) - f(b)) = (b, 0, 0)$$

Wiederum aus der Konstruktion des Verbindungshomomorphismus ∂ folgt nun, dass die Klasse von (b, c) auf die Klasse von $b = -\delta(b, c)$ in $H_{n-1}(B)$ abgebildet wird. \square

Satz 20

Ist

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} D \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen, dann sind die lange exakte Sequenz der kurzen exakten Sequenz und die lange exakte Sequenz des Abbildungszyinders $cyl(f)$ isomorph.

Beweis

Man hat folgendes Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{j} & cyl(f) & \xrightarrow{p} & cone(f) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \beta & & \downarrow \varphi & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{f} & C & \xrightarrow{g} & D & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

wobei $\varphi : cone(f) \rightarrow D$ durch $(b, c) \mapsto g(c)$ gegeben ist. Das linke Rechteck ist schon als kommutativ bekannt. Nach der Definition von φ kommutiert auch das letzte Rechteck und daher ist das ganze Diagramm kommutativ. Da die Zuordnung von langen exakten Sequenzen von Homologiemoduln zu kurzen exakten Sequenzen von Kettenkomplexen funktoriell ist, erhalt man ein kommutierendes Diagramm von Homologiemoduln

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n(B) & \longrightarrow & H_n(cyl(f)) & \longrightarrow & H_n(cone(f)) & \longrightarrow & H_{n-1}(B) & \longrightarrow & H_{n-1}(cyl(f)) \\ & & \parallel & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \varphi_* & & \parallel & & \downarrow \beta_* \\ H_n(B) & \longrightarrow & H_n(C) & \longrightarrow & H_n(D) & \longrightarrow & H_{n-1}(B) & \longrightarrow & H_{n-1}(C) \end{array}$$

Da β ein Quasi-Isomorphismus ist, ist nun nach dem 5-Lemma auch φ ein Quasi-Isomorphismus. Also ist die lange exakte Sequenz des Abbildungszyinders $cyl(f)$ isomorph zur langen exakten Sequenz der kurzen exakten Sequenz $0 \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow 0$. \square

Bemerkung 21

φ ist nicht zwingend eine Homotopieaquivalenz.

4 Wichtiges aus der kommutativen Algebra

Definition 22

Eine Abbildung $\phi : A \rightarrow A$ heißt *Projektion*, falls $\phi^2 = \phi$.

Lemma 23

Ist $\phi : A \rightarrow A$ eine Projektion, so ist $A \simeq \ker(\phi) \oplus \operatorname{im}(\phi)$.

Beweis

Sei $x \in A$, dann kann man

$$x = \underbrace{x - \phi(x)}_{\in \ker(\phi)} + \underbrace{\phi(x)}_{\in \operatorname{im}(\phi)}$$

schreiben. Ausserdem gibt es für $x \in \ker(\phi) \cap \operatorname{im}(\phi)$ ein $y \in A$, so dass $\phi(y) = x$. Also ist

$$x = \phi(y) = \phi^2(y) = \phi(x) = 0 \quad \square$$

Satz und Definition 24

Sei P ein R -Modul, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) P ist direkter Summand eines freien R -Moduls
- (ii) Jede kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

ist spaltend, d.h. $B \simeq A \oplus P$.

- (iii) Ist $f : P \rightarrow B$ ein Homomorphismus, $g : A \rightarrow B$ ein surjektiver Homomorphismus, dann gibt es immer einen Homomorphismus \bar{f} , der folgendes Diagramm kommutieren lässt:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \bar{f} \swarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{g} & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

- (iv) Der Funktor $A \mapsto \operatorname{Hom}(P, A)$ ist exakt.

Erfüllt P eine der obigen Aussagen, so heißt P *projektiv*.

Beweis

Auf Anfrage. □

Literatur

- [1] Serge Lang. *Algebra*. Springer, 2002.
- [2] Charles A. Weibel. *An Introduction to homological algebra*. Cambridge University Press, 1994.