Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
Dr. Fabian Januszewski
Michael Fütterer

Seminar: Iwasawa-Theorie

Sommersemester 2013

Vortrag 1: Ganzheitsringe, Dedekindringe und die Klassengruppe. Im ersten Vortrag sollen ein paar grundlegende Aussagen aus der algebraischen Zahlentheorie wiederholt bzw. eingeführt werden. Es soll erklärt werden, was der Ganzheitsring eines algebraischen Zahlkörpers ist, dass dieser ein Dedekindring ist und es in ihm deshalb eindeutige Primidealzerlegung gibt. Schließlich soll erklärt werden, was die Idealklassengruppe ist, und (ohne Beweis) gesagt werden, dass diese stets endlich ist.
Literatur: [Neu07, §I.3]

Vortrag 2: Unendliche Galoistheorie und proendliche Gruppen. Hier soll der Hauptsatz der Galoistheorie auf unendliche algebraische Erweiterungen verallgemeinert werden. Die Galoisgruppe einer solchen Erweiterung kann mit einer Topologie (der *Krulltopologie*) versehen werden und ist dann eine sogenannte *proendliche Gruppe*. Diese sollen allgemein erklärt werden.
Literatur: [Neu07; RZ00]

Vortrag 3: p-adische Zahlen, proendliche Ringe und Moduln. Hier soll der Körper $\mathbb{Q}_p$ der p-adischen Zahlen und der Teilring $\mathbb{Z}_p$ eingeführt werden. Das Henselsche Lemma soll erwähnt werden. Dies soll auch allgemeiner für Komplettierungen algebraischer Zahlkörper gemacht werden. Dann sollen noch proendliche Ringe, Moduln und proendliche Gruppenringe erklärt werden.
Literatur: [Neu07; RZ00], Diplomarbeit Abschnitt 1.1 ab Bsp. 1.10

Vortrag 4: Strukturtheorie für Iwasawa-Moduln I. Iwasawa-Moduln sind endlich erzeugte Moduln über einem bestimmten proendlichen Gruppenring, der *Iwasawa-Algebra*. Für solche gibt es eine Strukturtheorie, ähnlich dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen. Diese soll in zwei Vorträgen erklärt werden. Der erste Vortrag soll erklären, was Pseudo-Isomorphie von Moduln ist und wie der Struktursatz (in einer vorläufigen Form) aussieht.
LITERATUR: [NSW00, §V.1, S. 222–227]. Hier kann man sich direkt auf den Fall $A = \mathcal{O}[\![T]\!]$ einschränken, dadurch werden manche Argumente etwas einfacher.

Vortrag 5: Strukturtheorie für Iwasawa-Moduln II. Im zweiten Vortrag soll der Potenzreihenring $\mathcal{O}[\![T]\!]$ genauer untersucht werden, was zur endgültigen Version des Struktursatzes führt. Dies liefert zu jedem solchen Modul eine wichtige Invariante, das *charakteristische Ideal*.
LITERATUR: [NSW00, §V.3, S. 242–245]

Vortrag 6: Dirichlet-Charaktere, L-Funktionen und Bernoulli-Zahlen. In diesem Vortrag sollen L-Funktionen für Dirichlet-Charaktere eingeführt (ein Spezialfall davon ist die Riemannsche Zetafunktion) und einige ihrer grundlegenden analytischen Eigenschaften genannt werden. Ein analytischer Satz führt zur Definition der Bernoulli-Zahlen, die spezielle Werte dieser Funktionen sind. Für p-adische Dirichlet-Charaktere sollen ebenfalls Bernoulli-Zahlen definiert werden.
LITERATUR: [Zag81], Diplomarbeit Abschnitt I.4

Vortrag 7: Kummer-Kongruenzen und die p-adische Zetafunktion. Zwischen den Bernoulli-Zahlen bestehen gewissen Kongruenzen (die Kummer-Kongruenzen), die es erlauben, spezielle Werte der Riemannschen Zetafunktion p-adisch zu interpolieren. Dies führt zu einer p-adischen Zetafunktion, die eine stetige Funktion auf $\mathbb{Z}_p$ ist. Ohne Beweis soll gesagt werden, dass man diese sogar als p-adisch analytische Funktion konstruieren kann, und außerdem auch für Dirichlet-L-Funktionen.
LITERATUR: Diplomarbeit Abschnitt III.1

Vortrag 8: Iwasawas Konstruktion p-adischer L-Funktionen I. Iwasawa hat eine alternative Konstruktion der p-adischen Zetafunktion (oder allgemeiner p-adischen Dirichlet-L-Funktionen) angegeben. Sie ermöglicht es, diese Funktionen als Elemente der Iwasawa-Algebra anzusehen und liefert genauere Einsichten in die Natur dieser Funktionen. Im ersten Vortrag schauen wir uns die Struktur der Iwasawa-Algebra genauer an.
LITERATUR: [Neu07, (5.5)] für $K = \mathbb{Q}_p$, [Was82, S. 100], Diplomarbeit Kap. III 2.3–2.4

Vortrag 9: Iwasawas Konstruktion p-adischer L-Funktionen II. Der zweite Vortrag erklärt Iwasawas eigentliche Konstruktion: wir benutzen Stickelbergerelemente, um zu einem Dirichlet-Charakter ein Element in einer Iwasawa-Algebra zu erhalten. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf nichttriviale Charaktere.
Literatur: [Iwa72, §6] ,[Was82, §7.2], Diplomarbeit Kap. III 2.5

Vortrag 10: Iwasawas Konstruktion p-adischer L-Funktionen III. Der dritte Vortrag soll schließlich erklären, was dies mit der p-adischen L-Funktion zu tun hat.
Literatur: [Iwa72, §6.5, Lemma 3], Diplomarbeit Kap. III 2.6–2.7 und Anfang von Abschnitt III.4

Vortrag 11: Die Hauptvermutung und Konsequenzen. Die Hauptvermutung der Iwasawa-Theorie behauptet eine Beziehung zwischen den von Iwasawa konstruierten Elementen der Iwasawa-Algebra, die einer p-adischen L-Funktion entsprechen, und dem charakteristischen Ideal der Klassengruppe. Sie präzisiert, auf welche Weise die L-Funktionen arithmetische Informationen über die Klassengruppe beinhalten. Eine Folgerung daraus ist Kummers Kriterium über die Irregularität von Primzahlen, welches im Zusammenhang mit Fermats Letztem Satz interessant ist.
Literatur: [CS06, Kap. 1], [Kat07]

Literatur

[CS06] John Coates und Ramdorai Sujatha. *Cyclotomic Fields and Zeta Values.* Springer Monographs in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.

[Iwa72] Kenkichi Iwasawa. *Lectures on p-adic L-functions.* Annals of Mathematics Studies 74. Princeton: Princeton University Press und University of Tokyo Press, 1972.

[Kat07] Kazuya Kato. „Iwasawa Theory and Generalizations“. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* I (2007), S. 335–357.

[Neu07] Jürgen Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2007.

[NSW00] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt und Kay Wingberg. *Cohomology of Number Fields.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics 323. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2000.

[RZ00] Luis Ribes und Pavel Zalesskii. *Profinite Groups.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics 40. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2000.

[Was82] Lawrence C. Washington. *Introduction to Cyclotomic Fields.* Graduate Texts in Mathematics 83. New York: Springer-Verlag, 1982.

[Zag81] Don Bernard Zagier. *Zetafunktionen und quadratische Körper. Eine Einführung in die höhere Zahlentheorie.* Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1981.