

Seminar im Sommersemester 2010

Freie Gruppen und ihre Automorphismen

Das Seminar richtet sich an alle Studierenden, die sich für Algebra mit topologischen Aspekten interessieren. Ziel ist es, die freie Gruppe F_n und ihre Automorphismengruppe $\text{Aut}(F_n)$ näher kennen zu lernen. Wir werden ihre Elemente dazu auf Graphen und auf Flächen operieren lassen. Das Thema bietet ausreichend Möglichkeit, die Vorträge mit Beispielen zu beleben, um die theoretischen Beweise zu veranschaulichen.

Hier stellen Sie sich bitte eine schöne Grafik vor

Freie Gruppen treten in unterschiedlicher Verkleidung an vielen Stellen in der Mathematik auf, z. B. als Fundamentalgruppen von Graphen oder von gewissen Flächen. Automorphismen von F_n lassen sich dann als Homöomorphismen oder Homotopieäquivalenzen der Flächen bzw. Graphen realisieren.

Eine erste wichtige Strukturaussage ist der Satz von Nielsen-Schreier, den wir durch Operation auf Bäumen beweisen werden: *Jede Untergruppe einer freien Gruppe ist frei.* Überraschend ist dabei, dass der Rang einer Untergruppe von F_n nicht, wie etwa bei Vektorräumen, durch n beschränkt ist, sondern für $n \geq 2$ beliebig groß werden kann.

Jeder Automorphismus von F_n induziert einen Automorphismus von \mathbb{Z}^n , also eine Matrix in $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$. Diese und andere Konstruktionen ermöglichen uns die Verwendung von Matrizentheorie. Eine nützliche Aussage ist z. B. der Satz von Perron-Frobenius für Matrizen mit Einträgen in \mathbb{N} .

Wir werden uns im Seminar insbesondere auch für Fixgruppen interessieren: Für jede Untergruppe U von F_n betrachten wir ihren Stabilisator in $\text{Aut}(F_n)$; als Beispiel studieren wir *charakteristische* Untergruppen, deren Stabilisator ganz $\text{Aut}(F_n)$ ist.

Umgekehrt interessiert für jeden Automorphismus φ von F_n seine Fixgruppe $\text{Fix}(\varphi)$ in F_n . Wir werden lernen, dass für so genannte irreduzible Automorphismen der Rang von $\text{Fix}(\varphi)$ höchstens eins ist; das ist Teil der *Scott-Vermutung*.

Voraussetzungen: Algebra I (vor allem der Teil über Gruppen).

Die **Vorbesprechung** mit Themenvergabe findet statt am

Dienstag, 9. Februar 2010, 13:15 Uhr, Raum 1C-01

Zur Erleichterung der Planung bitten wir Interessierte, sich in die **Anmeldeliste** im Sekretariat bei Frau Hoffmann (Zimmer 4A-21.1 im Allianzgebäude) einzutragen.