Programm für das Seminar
Definitionskörper von Kurven und der Satz von Belyi
im Sommersemester 2009

Prof. Dr. Frank Herrlich, Dipl.-Math Florian Nisbach

Freitag 14:00–15:30, Seminarraum S13

1. Unendliche Galoistheorie *Harald Herrlich*
Im Laufe des Seminars werden wir es immer wieder mit der Körpererweiterung $\overline{\mathbb{Q}}\,/\,\mathbb{Q}$ zu tun haben, die zwar Galoissch, aber nicht endlich ist. Um den aus Algebra I bekannten Hauptsatz der Galoistheorie benutzen zu können, müssen wir ihn zunächst auf unendliche Körpererweiterungen erweitern. Dazu fasst man $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}\,/\,\mathbb{Q})$ als topologische Gruppe auf und studiert dann die abgeschlossenen Untergruppen und Normalteiler. Die topologische Sichtweise findet man ausführlich dargestellt in [Bo], 4.2 (S. 139-147), allerdings fehlt hier der erwähnte Hauptsatz. Den findet man in [We] 5.4 (S. 160-171), dafür kommt hier vielleicht die topologische Seite etwas kürzer. Auf jeden Fall brauchen wir im Folgenden die Lemmata 1.4-1.6 aus [Kö].

2. Strukturmorphismen, Definitions- und Modulkörper *Felix Wellen*
Von der „klassischen“ Definition einer nichtsingulären projektiven Kurve kommen wir über die aus der Vorlesung bekannte „abstrakte“ Sichtweise (Funktionenkörper mit Einbettung des Skalarkörpers) zu den dazugehörigen Schemata mit Strukturmorphismen. Für alle drei Formulierungen soll die Aktion von $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}\,/\,\mathbb{Q})$ erklärt werden (1.1 und 1.2 aus [Kö] und [N2], für letzteres sollte wohl noch an das Faserprodukt von Schemata „erinnert“ werden...). Weiter sollen Definitions- und Modulkörper von Kurven ([Kö] 1.3) und Morphismen (ebd. 2.1) definiert werden. Erste Eigenschaften von diesen fasst Prop 6 aus [Wo] zusammen. Das Theorem 2.2 aus [Kö] passt zwar thematisch recht gut, für den Beweis darf aber ruhig auf Vortrag 6 verwiesen werden.

3. Projektive Kurven und Riemannsche Flächen *Fabian Januszewski*
Ziel des Vortrags soll sein, die Äquivalenz zwischen den Kategorien **kompakte Riemannsche Flächen mit nichtkonstanten holomorphen Abbildungen** und **nichtsinguläre projektive Kurven über $\mathbb{C}$ mit nichtkonstanten regulären Abbildungen** möglichst genau zu verstehen. Dazu sollte es erst eine kurze Einführung in die Welt der Riemannschen Flächen geben (etwa aus [Fo], S. 1-10). Eine Quelle für den Beweis der Äquivalenz könnte [Jo] sein, auf jeden Fall aber ein gerüttelt Maß [N1].

4. Überlagerungen, Verzweigung und Monodromie *Carla Spies*
In diesem Vortrag möchten wir etwas über die funktionentheoretische und topologische Sicht auf Überlagerungen lernen. Zunächst werden wir sehen, dass eine holomorphe Abbildung kompakter Riemannscher Flächen eine unbegrenzte, verzweigte Überlagerung ist (Auszüge aus [Fo] §4 (S. 18-26)), und die lokale Gestalt einer holomorphen Abbildung studieren ([Fo] Satz 2.1 (S. 9)). Hier sollte der Begriff „Verzweigungsordnung“ fallen und

der Zusammenhang zum algebraischen Verzweigungsbegriff hergestellt werden, außerdem ist dies der richtige Zeitpunkt, Verzweigungspunkte und Kritische Werte zu definieren. Von der topologischen Seite her sollten der Hauptsatz der Überlagerungstheorie, galoissche Überlagerungen sowie Monodromiegruppen und -aktionen diskutiert werden (etwa aus [Sch], S.215-229). Eine andere Quelle, die diese Punkte nicht ganz vollständig enthält, aber mehr in die von uns einzuschlagende Richtung weist, ist [LZ] – und zwar der Abschnitt 1.2 (S. 13-26) für die topologische und Abschnitt 1.8 (S. 70-76) für die funktionentheoretische Seite.

5. Galois-Descent *Anja Randecker*
Dieses eher abstrakte Hilfsmittel werden wir im nächsten Vortrag tief im Beweis benötigen. Zunächst sollte, soweit nicht aus der Algebra bekannt, die lineare Unabhängigkeit von Charakteren gezeigt werden ([Bo] 4.6 (S. 182f)). Der Galois-Descent selbst ist in für unsere Zwecke ausreichender Kürze in Abschnitt 4.9 (S. 196-200) dargestellt. Satz 4 daraus entspricht unmittelbar 1.10 aus [Kö], und damit können wir jetzt auch das vorhergehende Theorem 1.9 beweisen.

6. Der Satz von Belyi und der Beweis seiner „offensichtlichen" Richtung
Markus Maier
Endlich nähern wir uns dem ersten Höhepunkt unseres Seminars: Der Satz von Belyi kann formuliert werden ([Kö], Introduction) und seine offensichtliche Richtung bewiesen werden. Prop 3.1 aus [Kö] sollte mit den Vorträgen 3 und 4 problemlos zu bewältigen sein, Prop 3.2 ist dann ein Leichtes. Das etwas schwergewichtigere Theorem 2.2 schließt dann den Beweis ab.

7. Resultanten und Diskriminanten *Stefanie Maschner*
Hier lernen wir zwei wichtige Hilfsmittel aus der klassischen Algebra kennen, nämlich die Resultante und die Diskriminante. Wir werden sie etwas ausführlicher studieren, als es für den nächsten Vortrag nötig ist, denn die Allgemeinbildung soll ja auch nicht zu kurz kommen... Eine schöne Quelle ist Abschnitt 4.4 aus [Bo] (S. 158-171), nach Korollar 10 darf dann auch Schluss sein.

8. Die „triviale" Richtung des Belyi-Theorems *Julia Hildebrandt*
Die Rückrichtung des Beweises funktioniert mit einer bei weitem konkreteren Konstruktion und ist deshalb eher etwas für Tüftler. Zunächst brauchen wir das Lemma 3.4 aus [Kö], und die beiden darauf folgenden Schritte werden wir (doppelt hält besser...) je zweimal beweisen. Zunächst drücken wir die kritischen Werte in $\mathbb{Q} \cup \infty$, einmal mit Hilfe von Minimalpolynomen ([Kö], Lemma 3.5), einmal mit Hilfe der im letzten Vortrag eingeführten Resultanten (Abschnitt 3.1 in [Ha]). Um die Anzahl der kritischen Werte auf drei zu reduzieren, gibt es wieder zwei Möglichkeiten: Belyis klassischen Ansatz (Lemma 3.6 aus [Kö]) und Zapponis Trick (Lemma 3 aus [Wo]). Damit ist der Beweis abgeschlossen, der Vortrag aber noch nicht: Den runden wir noch mit dem Korollar 3.7 aus [Kö] ab.

9. $X/\mathbf{Aut}(X)$ und Kurven mit vielen Automorphismen *Emmanuel Taube*
Zunächst werden wir sehen, dass für eine Kurve X von Geschlecht $g \geq 2$ der Quotient $X/\mathrm{Aut}(X)$ bereits über dem Modulkörper $M(X)$ definiert ist. (Das ist Korollar 1.11 aus [Kö]). Dann werden wir lernen, was eine Kurve mit vielen Automorphismen ist: Dies

wird im Lemma 4 ([Wo], Abschnitt 3.5) definiert. Der Beweis des Satzes, dass solche Kurven bereits über ihrem Modulkörper definiert sind, braucht ein bisschen Vorarbeit ([Wo], Abschnitt 3.7, S. 26-29).

10. Dessins d'enfants und die Grothendieck-Korrespondenz *Tobias Columbus*
Zunächst wollen wir Dessins auf topologischen Flächen definieren und dann die Bijektion zwischen Isomorphieklassen (reiner) Dessins und Isomorphieklassen (reiner) Belyimorphismen zeigen – das ist die Grothendieck-Korrespondenz. Alles Nötige dazu findet man in [Sn], S. 47-56. Sofern nicht in Vortrag 4 geschehen, sollte der Riemannsche Existenzsatz (z.B. Theorem 1.8.14 auf Seite 74 in [LZ]) zumindest zitiert werden.

11. Die Aktion von Gal($\overline{\mathbb{Q}}$ / $\mathbb{Q}$) auf der Menge der Dessins *Michael Walter*
Zunächst sollten einfache Invarianten wie Grad, Geschlecht und „Passport" diskutiert werden ([N1]). Dann wollen wir die erstaunliche Tatsache beweisen, dass die Aktion treu ist, und zwar sogar, wenn man sich auf Geschlecht 0 einschränkt. Das findet man in [Sn] (S. 56-59). Je nach Belieben des Vortragenden kann es dann noch eine Skizze der Treue in Geschlecht 1 geben.

12. Beispiele für Dessins
Ein erstes einfaches Beispiel ist das zu $\beta(z) = z^n$ gehörige Dessin. Weitere mögliche Beispiele sind: Tschebyschew-Polynome, ein galois-konjugiertes Paar (oder Tripel) von Bäumen, oder die Konstruktion eines Belyimorphismus auf einer über $\mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ definierten elliptischen Kurve (im Zweifelsfall: [N1]).

13. Von der Galoisaktion zu $\widehat{GT}$
Für den unwahrscheinlichen Fall, dass das Sommersemester immer noch nicht zu Ende ist, kann es an dieser Stelle einen aufregenden Kurztrip in die Grothendieck-Teichmüller-Welt geben: Wir konstruieren (oder skizzieren) einen Gruppenhomomorphismus Gal($\overline{\mathbb{Q}}$ / $\mathbb{Q}$) $\to$ $\widehat{GT}$, von dem wir, ohne es zu ahnen, in Vortrag 11 schon die Injektivität gezeigt haben. Vielleicht kann Kapitel 2 aus [N3] eine halbwegs passable Quelle abgeben. Achtung, dieser Vortrag ist etwas für Wagemutige!

Literatur

[Bo] S. Bosch *Algebra*, Springer-Verlag (1993)

[Kö] B. Köck *Belyi's Theorem Revisited*, Contributions to Algebra and Geometry, Vol. 45 (2004), No. 1, pp. 253-265[1]

[Fo] O. Forster *Riemannsche Flächen*, Springer (1977)

[Ha] H. Hammer *Der Satz von Belyi*, Diplomarbeit (2000)

[Jo] J. Jost *Compact Riemann Surfaces*, Springer (1997)

[1]http://www.emis.de/journals/BAG/vol.45/no.1/b45h1koe.pdf

[LZ] S. K. Lando, A. K. Zvonkin *Graphs on Surfaces and Their Applications*, Encyclopædia of Mathematical Sciences, Springer (2004)

[N1] Florian Nisbach *Private communication* (2009)

[N2] Florian Nisbach *Galoisaktionen auf Schemata*, Fragment (2008)[2]

[N3] Florian Nisbach *Eine Aktion von* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}\,/\,\mathbb{Q})$ *auf der Menge der* F_2*-proendlichen Schlingungen*, Diplomarbeit (2006)

[Sch] H. Schubert *Topologie*, B. G. Teubner (1964)

[Sn] L. Schneps *Dessins d'enfants on the Riemann sphere* in: L. Schneps (editor) The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants, LMS Lecture Notes Series 200, Cambridge University Press (1994)

[We] S. H. Weintraub *Galois Theory*, Springer-Verlag (2006)[3]

[Wo] J. Wolfart *Kinderzeichnungen und Uniformisierungstheorie*, Vorlesungsmanuskript (2001)[4]

[2] Auf der Seminarseite

[3] Im Uninetz elektronisch verfügbar: http://www.springerlink.com/content/jm3263/

[4] http://www.math.uni-frankfurt.de/ wolfart/Artikel/kizei.pdf